Diss. E T H

Diss. Nr. 5223 A

Nicht ausleihbar

Kernannahmen und Grundlagen dieser Dissertation sind eklatant falsche Interpretationen von angeführten Referenzen.

(siehe z.B. Seiten -74- und -75-)

Untersuchung korrelativer Trackingsysteme mit Hilfe der Fokker-Planck Methode

A B H A N D L U N G

zur Erlangung

des Titels eines Doktors der technischen Wissenschaften

der

E I D G E N O E S S I S C H E N T E C H N I S C H E N

H O C H S C H U L E Z U E R I C H

Ser. ETH-BIBLIOTHEK ZÜRICH Kat.

vorgelegt von

HEINRICH MEYR

dipl. El.-Ing. ETH

geboren am 8. April 1941

von Zürich

Angenommen auf Antrag von

Prof. H. Weber, Referent

Prof. Dr. E. Baumann, Korreferent

1974

ANNEMARIE, CLAUDIA, NICOLE

GEWIDMET

Die vorliegende Arbeit entstand aus dem praktischen Bedürfnis heraus, einen auf dem Korrelationsprinzip beruhenden Regelkreis zur berührungslosen Geschwindigkeitsmessung zu analysieren. Schon bald zeigte sich, dass die dabei auftretenden Probleme von viel allgemeinerem Interesse waren, als dies die ursprüngliche Aufgabenstellung vermuten liess. Es schien daher sinnvoll und lohnend, die ursprüngliche Aufgabenstellung zu erweitern und zu verallgemeinern.

Der Grossteil der vorliegenden Untersuchung basiert auf Arbeiten, die ich in der Forschungsabteilung der Firma Hasler AG, Bern, durchführen konnte. Für die mir gewährte Unterstützung möchte ich der Geschäftsleitung meinen besten Dank aussprechen. Mein herzlichster Dank gebührt Herrn Dr. H. Mey, Leiter der Forschungsabteilung der Hasler AG. Ohne seine ständige Unterstützung und Ermunterung hätte diese Arbeit wohl kaum entstehen können.

Einen wesentlichen Anteil am Gelingen dieser Arbeit hat Herr Prof. H. Weber. Für seine wertvollen Anregungen, seine Unterstützung und sein Interesse an meiner Arbeit bin ich ihm zu grossem Dank verpflichtet. Mein herzlicher Dank geht auch an Prof. Dr. E. Baumann für sein Interesse an der Arbeit, das er mit der Uebernahme des Korreferates bekundete.

INHALTSVERZEICHNIS

1. EINFUEHRUNG

1.1. Korrelative Trackingsysteme
1.2. Kurze Uebersicht über frühere Arbeiten
1.3. Uebersicht über die vorliegende Arbeit

2. ERZEUGUNG EINER UNGERADEN KORRELATIONSFUNKTION MITTELS LINEARER NETZWERKE

2.1. Zeitkontinuierliche Signale
2.2. Zeitdiskrete Signale

3. MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG DES REGELKREISES

3.1. Aufbau des Regelkreises
3.2. Eigenschaften der Störsignale
3.3. Beschreibung des Produkteprozesses für zeitkontinuierliche Signale
3.4. Beschreibung des Produkteprozesses für zeitdiskrete Signale
3.5. Die Differentialgleichung des Regelkreises

4. DIE FOKKER-PLANCK GLEICHUNG

4.1. Einführung
4.2. Einige Sätze des Itô-Kalküls
4.3. Herleitung der F-P Gleichung mit Hilfe des Itô-Differentials
4.4. Rand- und Anfangsbedingungen
4.5. Physikalische Interpretation der F-P Gleichung

Appendix: Vektor- und Matrixnotation

5. ERNEUERUNGSPROZESSE, STATIONAERE DICHTEFUNKTIONEN UND MITTLERE LEBENSDAUER VON TRAJEKTORIEN

5.1. Problemstellung
5.2. Zusammenhang zwischen Einzel- und Erneuerungsprozess
5.3. Die F-P Gleichung des Einzelprozesses
5.4. Die Differentialgleichung für die stationäre Lösung des Erneuerungsprozesses
5.5. Die mittlere Lebensdauer einer Trajektorie
5.6. Beweis, dass die Dichtefunktion $p(\phi, \underline{y}_0^T; t=\infty)$ auf 1 normiert ist

6. ANALYSE DES DLL ERSTER ORDNUNG

6.1. Einführung
6.2. Die Differentialgleichungen des DLL erster Ordnung mit dT/dt=konstant
6.3. Stationäre Lösung für die Randbedingung $p(\phi=\pm\infty) = 0$
6.4. Bestimmung der zeitabhängigen Lösung durch Variabelnseparation
6.5. Quasistationäre Zustände
6.6. Die stationäre Dichtefunktion des Erneuerungsprozesses
6.7. $E(T_L)$ und mittlere Anzahl Zyklen pro Zeiteinheit
6.8. Approximation des Erneuerungsprozesses durch einen Markov-Prozess mit reflektierenden Barrieren
6.9. Optimierung des DLL

7. SERIESCHALTUNG VON TRACKINGSYSTEMEN ERSTER ORDNUNG

7.1. Einführung
7.2. Die Differentialgleichungen
7.3. Die F-P Gleichung für das teilweise linearisierte System
7.4. Die Dichtefunktion in der normierten Variabeln $x = \phi/\phi_N$

Appendix: Approximation von $E(y_1/\phi)$

8. GESCHWINDIGKEITSMESSUNG MIT KORRELATIONSVERFAHREN

8.1. Allgemeines
8.2. Systematische Fehler des Korrelationsrechners
8.3. Die Streuung σ_ϕ^2
8.4. Wegmessung
8.5. Untere Geschwindigkeitsgrenze
8.6. Systemaufbau
8.7. Berechnung der Parameter für den digitalen DLL

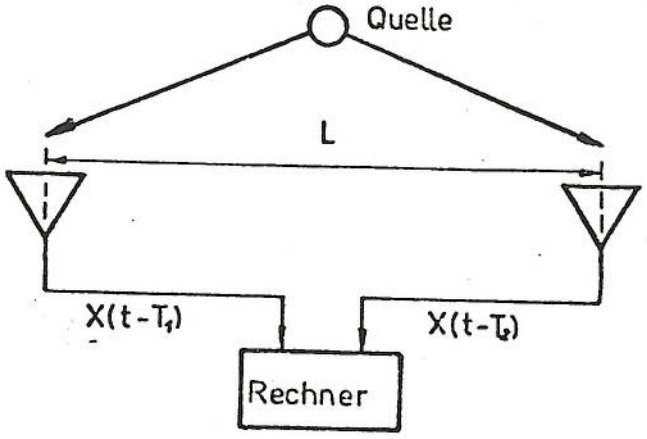
9. ERNEUERUNGSPROZESSE UND IHRE ANWENDUNG AUF TRACKINGSYSTEME MIT PERIODISCHER NICHTLINEARITAET

9.1. Einführung
9.2. Differentialgleichungen und äquivalentes Modell
9.3. Die F-P Gleichung des Erneuerungsprozesses
9.4. Zusammenhang zwischen der Dichtefunktion des Erneuerungsprozesses und derjenigen der PE-Lösung
9.5. Mittlere Zyklenzeit $E(T_L)$ und mittlere Anzahl Zyklen pro Zeiteinheit

1. EINFUEHRUNG

1.1. KORRELATIVE TRACKINGSYSTEME

In vielen Problemen der Geschwindigkeitsmessung, des Radars oder der Kommunikationstechnik ist es notwendig, die Verzögerung zwischen zwei Versionen des gleichen Signals zu messen. Dabei kann es sich, wie z.B. beim Radar, darum handeln, die Verzögerung zwischen ausgesandtem und reflektierten Signal zu bestimmen (Fall 1) oder auch darum, die Laufzeitdifferenz eines von einer Quelle emittierten Signals zu bestimmen, das auf verschiedenen Wegen zwei räumlich getrennte Empfänger erreicht (Fall 2). (Fig. 1 - 1)



T_1 : Laufzeit des Signals x(t) zum Empf. 1

T_2 : " " " x(t) " " 2

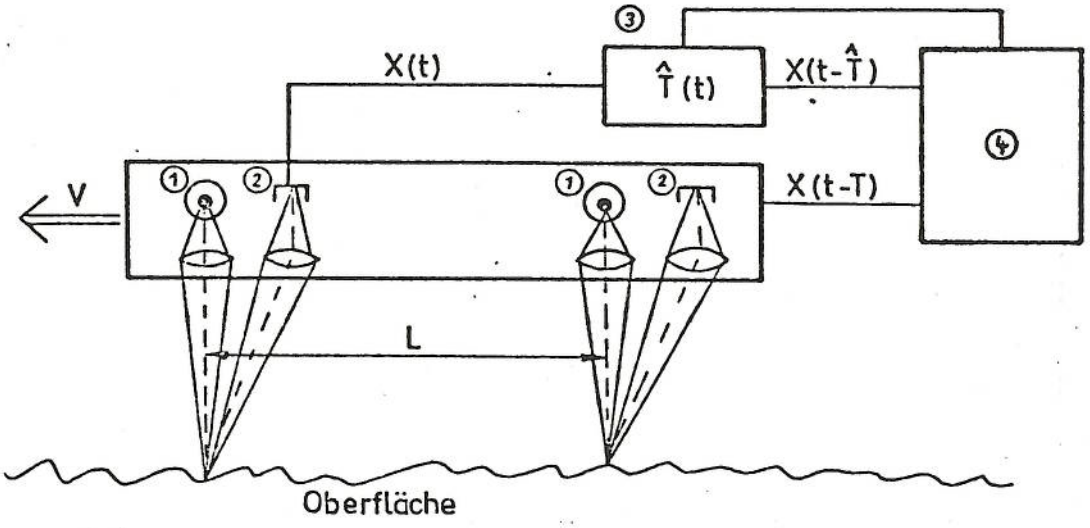
L : Abstand der Empfängerantennen

Fig. 1-1. Korrelationspeilung

Durch Vergleich der Laufzeitdifferenz dreier solcher Paare kann die Position der Quelle bestimmt werden. [1], [2, S. 345] Eine leicht abgeänderte Form des beschriebenen Messproblems findet man in der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung. Die Geschwindigkeit eines Objektes - oder auch diejenige eines strömenden Mediums - lässt sich prinzipiell dadurch bestimmen, dass die Laufzeit T des betreffenden Objektes zwischen zwei festen Punkten gemessen wird. Bei bekanntem Abstand L zwischen den zwei Punkten ist die Geschwindigkeit dann

$$V = \frac{L}{T} \qquad (1)$$

Das Blockschema eines solchen Gerätes ist in Fig. 1 - 2 dargestellt.



1 : Lichtemittierende Dioden

2 : Photodioden

3 : Variable Verzögerungsleitung

4 : Korrelationsrechner

Fig. 1-2. Berührunglose Geschwindigkeitsmessung

Zwei lichtemittierende Dioden, die in Bewegungsrichtung im Abstand L hintereinander angeordnet sind, werfen ihr Licht auf die Oberfläche. Entsprechend der örtlichen Beschaffenheit der Oberfläche wird mehr oder weniger Licht reflektiert, das dann in den Photodioden in elektrische Signale zurückverwandelt wird. Im Idealfall sind die beiden regellosen Signale von identischer Form und nur um die Laufzeit T gegeneinander verschoben. Geschwindigkeit v, Abstand L und T sind dabei durch Gl. (1) verknüpft. Zur Bestimmung der Laufzeitdifferenz T kann man die Tatsache ausnützen, dass die Korrelationsfunktion

$$R_{xx}(T-\vartheta) = E\left[x(t-T)\cdot x(t-\vartheta)\right]$$

ihr Maximum für $T - \vartheta = 0$ hat.

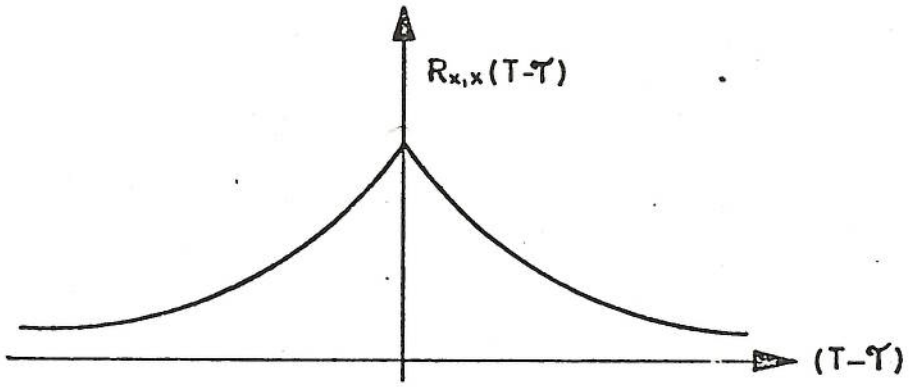


Fig. 1-3.

Das Messverfahren (Fig. 1 - 2) beruht nun darauf, das Signal x(t) des ersten Messgebers in der Verzögerungsleitung künstlich zu verzögern und zwar um eine Zeit $\hat{T}$, die der Rechner auf $\hat{T} = T$ einstellen muss. Im Prinzip könnte man sich einen Korrelationsrechner vorstellen, der die Korrelationsfunktion für verschiedene $\hat{T} - T$ berechnet und zu jedem Zeitpunkt das Maximum bestimmt. Tatsächlich wurde ein Gerät nach diesem Grundgedanken gebaut [3]. Die genannten Operationen lassen sich aber beträchtlich vereinfachen. Da nur der Ort des Maximums, nicht aber sein Wert, von Interesse ist, stellt sich die Frage, ob nicht eine Messgrösse gefunden werden kann, die für $\hat{T} = T$ eine Nullstelle hat (Fig. 1 - 4).

der

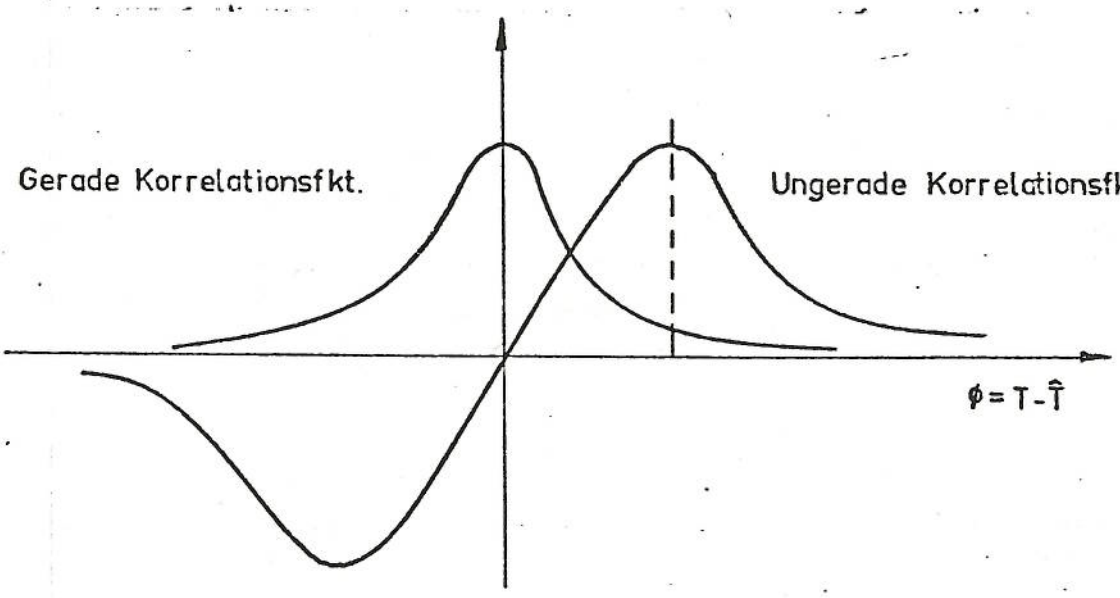


Fig. 1-4. Gerade und ungerade Korrelationsfunktion

Ein solches Nullstellenverfahren hätte den Vorteil, dass

1. es unabhängig von Schwankungen des Maximums wäre
2. die Nullstelle - innerhalb gewisser Grenzen - durch Rückkopplung gefunden werden könnte.

In der praktischen Anwendung kommen Leistungsschwankungen der Signale bis zu 60dB vor, (die durch einen AGC ausgemittelt werden müssen), sodass ein Extremalwertregler kaum funktionsfähig wäre. Davon abgesehen, ist ein Extremalwertregler erheblich aufwendiger als eine einfache Rückkopplungsschaltung.

In Kap. 2 werden wir zeigen, wie man durch ein lineares Netzwerkpaar eine ungerade Korrelationsfunktion erzeugen kann. Läuft das Signal $x(t-\hat{T})$ durch ein Netzwerk mit der Stossantwort $h_1(t)$ und $x(t-T)$ durch ein zweites Netzwerk $h_2(t)$, so erscheint am Ausgang des Multiplikators im Mittel der Wert Null, sofern gilt $\hat{T} = T$.

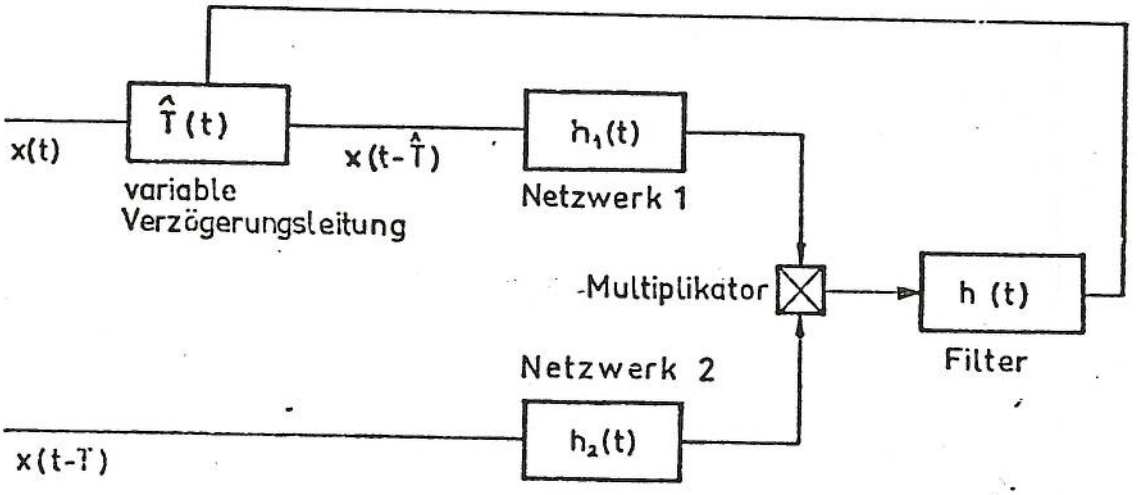


Fig. 1-5. Blockschema des Korrelationsrechners

Es ist wichtig festzuhalten, dass die Spannung am Multiplikator nur im Mittel verschwindet. Dem Mittelwert ist in jedem Falle ein mittelwertsfreier Rauschprozess überlagert, selbst dann, wenn die Signale $x(t-\hat{T})$ und $x(t-T)$ in beiden Kanälen identisch wären. Das Filter h(t) hat die Aufgabe, Mittelwert und Rauschen möglichst gut voneinander zu trennen. Im Gegensatz zum klassischen Filter liegen hier aber Nutz- und Störsignal im gleichen Frequenzband. Bezüglich der Bandbreite des Filters muss daher ein Kompromiss geschlossen werden zwischen gewünschter Dynamik (grosse Bandbreite) und guter Entfernung des Rauschens (kleine Bandbreite). Stimmen Laufzeitunterschied T und elektronische Verzögerung $\hat{T}$ nicht überein, erscheint am Ausgang des Multiplikators eine - je nach dem Vorzeichen der Abweichung $\emptyset$ - positive oder negative Spannung. Durch Rückkopplung dieser Spannung wird die variable Verzögerungsleitung so lange verstellt, bis am Multiplikator im Mittel null erscheint, d.h. T und $\hat{T}$ übereinstimmen. In Anlehnung an den Phase-Locked Loop (PLL) wollen wir den in Fig. 1 - 5 dargestellten Regelkreis in Zukunft Delay-Locked Loop (DLL) nennen.

Obwohl wir den DLL am Beispiel des berührungslosen Geschwindigkeitsmessers eingeführt haben, ist klar, dass die Anordnung für alle Anwendungen von Fall 2 benützt werden kann. Der einzige Unterschied von Fall 1 gegenüber Fall 2 besteht darin, dass man ein lokal erzeugtes Referenzsignal mit dem ausgesandten und reflektierten Signal korreliert (Fig. 1 - 6). Referenzsignal y(t) und reflektiertes Signal x(t-T) sind dabei so gewählt, dass wieder eine ungerade Korrelationsfunktion entsteht [4], [5].

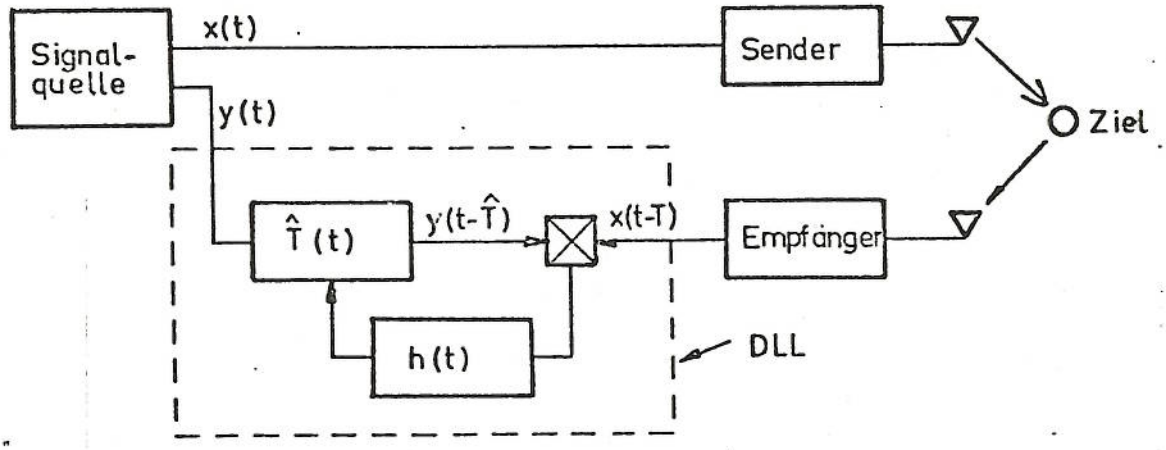


Fig. 1-6. Positionsbestimmung mittels DLL

Die Funktion des DLL ist in mancher Hinsicht analog zu derjenigen des PLL

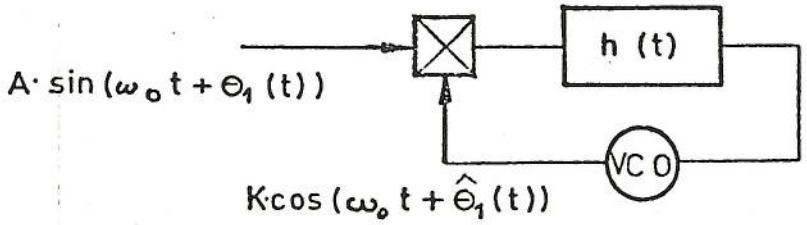


Fig. 1-7. Phase-Locked Loop (PLL)

Beim PLL wird eine lokal erzeugte, periodische Referenz mit dem ankommenden Signal korreliert. Analog dem DLL ist der Mittelwert der Multiplikatorspannung eine ungerade Funktion der Phasendifferenz $(\Theta_1 - \hat{\Theta}_1)$. Im Unterschied zum DLL ist diese Funktion aber periodisch.

Trotz der Einfachheit des Messprinzips bereitet die mathematische Analyse grosse Mühe. Dies hat zwei Hauptgründe:

1. Die zur Laufzeitmessung verwendeten Signale sind regellose Vorgänge.

2. Wegen des Multiplikators ist der Regelkreis nichtlinear.

Mathematisch gesehen haben wir es daher mit nichtlinearen, stochastischen Differentialgleichungen zu tun. Leider ist es nicht möglich, eine befriedigende Analyse durch Linearisierung zu erhalten. Zum einen würden viele Ergebnisse ungenau, zum andern liessen sich wichtige Phänomene mit der linearisierten Theorie überhaupt nicht erklären. Bei allen korrelativen Trackingsystemen kennt man zwei grundsätzlich verschiedene Betriebsarten 1. "Acquisition", 2. "Tracking". Da die Rückstellkraft des DLL mit wachsendem Fehlerbetrag ϕ rasch abnimmt, muss der Regelkreis zu Beginn jeder Messung in die Umgebung von $\phi = 0$ gebracht werden ("Acquisition"). Dies kann beispielsweise durch "sweepen" der elektronischen Verzögerung $\hat{T}$ über den vermuteten Wertebereich von T geschehen. Sofern die Aenderung $d\hat{T}/dt$ nicht zu rasch ist, wird der Regelkreis beim Durchlaufen von $\phi = 0$ einhängen und anschliessenden Aenderungen der Laufzeit T nachfolgen ("Tracking"). Doch selbst wenn der DLL einmal eingehängt hat, besteht immer eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass er zu einem späteren Zeitpunkt ausser Tritt fällt. Die Gründe dafür können zu schnelle Aenderungen dT/dt oder gestörte Signale sein. Die aufgeführten Phänomene sind typisch nichtlinear und treten bei einer linearen Rückstellkraft nicht auf. Um sie zu verstehen und quantitativ erfassen zu können, ist man daher gezwungen, komplexere mathematische Methoden zu verwenden.

1.2. KURZE UEBERSICHT UEBER FRUEHERE ARBEITEN

Ueber das Gebiet der PLL existiert eine sehr umfangreiche Literatur. Eine kürzlich erschienene Bibliographie [6] nennt mehrere hundert Titel. Im Gegensatz dazu wurde dem DLL sehr wenig Beachtung geschenkt [1], [4], [5], [28]. Dies mag damit zusammenhängen, dass die Anwendung solcher Regelkreise auf wenige Fälle beschränkt blieb. Mit dem Aufkommen neuer Trak tionssysteme (z.B. Magnetschwebebahn) eröffneten sich den Korrelationsmesssystemen neue und interessante Anwendungen im Bereich der Geschwindigkeits- und Wegmessung, z.B. [12], [29], [30]. Eine Uebersicht über andere Anwendungen findet man in [2], [8]. Es verdient auch erwähnt zu werden, dass Guanella [31] einer der allerersten Autoren war, der sich mit Korrelationsanalyse befasste, wie einige Patente aus den 30er Jahren bezeugen.

Die ersten Anwendungen der Fokker-Planck Methode erschienen in der russischen Literatur [32], [14]. Viterbi [26], [34] scheint der erste westliche Autor zu sein. Im Jahre 1969 publizierte Lindsey [35] eine Arbeit, in der er die bestehende Theorie vereinheitlichte und stark erweiterte. Vom gleichen Autor erschien kürzlich ein Buch [15] mit vielen neuen Resultaten des Verfassers und seiner Studenten. Eine interessante Methode zur Lösung der Fokker-Planck Gleichung befindet sich in [36]. Fragen der Optimierung von Trackingsystemen werden in [19], [37] behandelt. Bezüglich der mathematischen Grundlagen des Itô-Kalküls sei auf [13] verwiesen.

1.3. UEBERSICHT UEBER DIE VORLIEGENDE ARBEIT

Im Kapitel 1 wird eine qualitative Beschreibung der korrelativen Trackingsysteme und einige ihrer Anwendungen gegeben.

Das Kapitel 2 ist dem Problem der Erzeugung einer ungeraden Korrelationsfunktion durch lineare und physikalisch realisierbare, zeitinvariante Netzwerkpaare gewidmet. Dabei wird der zeitkontinuierlich - wie zeitdiskrete Fall behandelt. Es werden die Bedingungen an die Uebertragungsfunktionen der Netzwerkpeare angegeben. Es zeigt sich dabei, dass die in der Literatur bisher bekannten Lösungen nur Spezialfälle einer umfassenderen Klasse sind. Es wird gezeigt, dass sich eine gewisse Klasse von Netzwerkpaaren besonders gut eignet, da das Leistungsdichtespektrum ihrer Ausgangsfunktionen für $\omega = 0$ und $\phi = 0$ eine Nullstelle aufweist.

Das Kapitel 3 ist der mathematischen Beschreibung des Regelkreises durch stochastische Differentialgleichungen gewidmet. Es wird ein übersichtliches, mathematisches äquivalentes Ersatzmodell hergeleitet. Dabei werden die notwendigen Annahmen und Vereinfachungen sorgfältig diskutiert.

Im Kapitel 4 wird gezeigt, wie man die Koeffizienten der Fokker-Planck Gleichung aus der korrespondierenden stochastischen Vektor - Differentialgleichung (State-Space Equation) gewinnt. Dazu wird eine von Lindsey [15] vorgeschlagene Methode verwendet. Die für diese Arbeit relevanten Sätze des Itô-Kalküls werden ohne Beweis, aber mit detailierter Literaturangabe, zitiert. Dieses Uebersichtskapitel findet seine Begründung in der Tatsache, dass, obwohl sämtliche Sätze in der Mathematik bekannt sind, es recht schwierig ist, ein abgerundetes Bild über diesen Themenkreis zu erhalten. Das Kapitel schliesst mit einer physikalischen Interpretation der Fokker-Planck Gleichung, die sich für die weitere Untersuchung als sehr nützlich erweist.

Im Kapitel 5 wird eine neue und allgemeine Methode zur Analyse von korrelativen Trackingsystemen beschrieben. Die Methode beruht auf der Theorie der Erneuerungsprozesse und erlaubt eine einheitliche Behandlung von Systemen beliebiger Ordnung mit periodischer (PLL) oder aperiodischer (DLL), Nichtlinearität. Es wird gezeigt, dass durch Lösen der Fokker-Planck Gleichung des Erneuerungsprozesses sowohl die stationäre Dichtefunktion, wie auch die mittlere Zeit zwischen zwei Zyklen $E(\hat{T}_L)$ (Meantime between cycle slipping) und die mittlere Anzahl Zyklen pro Zeiteinheit, $N_{\pm}$, erhalten wird.

Im Kapitel 6 wird eine ausführliche Analyse des DLL erster Ordnung gegeben. Dies ist durch die Tatsache gerechtfertigt, dass der DLL erster Ordnung der in der Praxis weitaus am häufigsten verwendete Regelkreis ist. Es wird gezeigt, dass die Streuung σ^2_ϕ für jede physikalisch realisierbare Nichtlinearität im stationären Zustand $t \to \infty$ über alle Grenzen wächst, sofern man für ϕ die ganze reelle Zahlengerade zulässt. Diese Tatsache ist eine direkte Konsequenz des "ausser Tritt Fallens" des Regelkreises (cycle slipping beim PLL). Die zeitabhängige Lösung der Fokker-Planck Gleichung wird durch Variabeln-Separation gelöst. Es erweist sich dann, dass man die Dichtefunktion $q(\phi,t)$ durch Lösen eines regulären Sturm-Liouville Problems erhält. Die ersten zwei der Eigenwerte haben dabei eine wichtige physikalische Bedeutung. Von Interesse ist, dass sich sogenannte quasistationäre, d.h. sehr langsam veränderliche, Zustände einstellen können. Durch Lösen der Fokker-Planck Gleichung des Erneuerungsprozesses werden die stationäre Dichtefunktion sowie $E(\tau_L)$ und $N_\pm$ berechnet. Der Abschluss des Kapitels ist der Optimierung des DLL via Nichtlinearität $g(\phi)$ gewidmet.

Kapitel 7. Für gewisse Anwendungen erweist es sich als notwendig, zwei korrelative Trackingsysteme (DLL) erster Ordnung zu koppeln. Das resultierende System ist dann von zweiter Ordnung. Aus später ersichtlichen Gründen (Kapitel 8) ist ein solches System nicht durch einen DLL mit Filter $F(p)$ realisierbar. Die zweidimensionale Fokker-Planck Gleichung des Erneuerungsprozesses des gekoppelten Systemes wird hergeleitet. Es zeigt sich, dass eine analytische Lösung Kenntnis von bedingten Erwartungswerten erfordert, die ihrerseits nur bei bekannter Dichtefunktion bestimmt werden können. Um Näherungslösungen zu erhalten, werden diese Erwartungswerte approximiert.

Kapitel 8 ist der Anwendung der Theorie auf das Problem der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung gewidmet. Es werden die systematischen Fehler eines solchen Systems diskutiert. Anschliessend wird gezeigt, wie die Streuung σ^2_δ und die Streuung der Wegmessung (via Geschwindigkeitsintegration) von den einzelnen Parametern abhängt. Zur Bestimmung der unteren Geschwindigkeitsgrenze erweist sich die Kenntnis von $E(\tau_L)$ als grundlegend. Den Abschluss des Kapitels bildet ein kurzer Ueberblick über den Aufbau eines realisierten Systems, sowie eine Tabelle, mit deren Hilfe die in Kapitel 7 verwendeten Parameter aus den geometrischen und kinematischen Grössen berechnet werden können.

Kapitel 9. Bis anhin wurde die stationäre Dichtefunktion des PLL mit Hilfe der sogenannten Periodic Extension (PE)-Methode ermittelt. Zur Bestimmung von $E(\tau_L)$ musste die Fokker-Planck Gleichung mit andern Randbedingungen gelöst werden; die Grössen $N_\pm$ liessen sich nur approximativ ermitteln. Allgemein blieb die Frage offen, wie die stationäre PE-Lösung aus der zeitabhängigen Lösung hervorgeht. Im Gegensatz dazu findet man durch Lösen der Fokker-Planck Gleichung des Erneuerungsprozesses sowohl die stationäre Dichtefunktion, wie $E(\tau_L)$ und $N_\pm$. Es zeigt sich, dass die PE- Lösung nur im Falle des PLL erster Ordnung mit der, auf das Intervall $[-\pi, \pi]$ beschränkten, Lösung des Erneuerungsprozesses übereinstimmt. Die Gründe dafür werden eingehend diskutiert.

2. ERZEUGUNG EINER UNGERADEN KORRELATIONSFUNKTION MITTELS LINEARER NETZWERKE

Einleitung

Die Erzeugung einer ungeraden Korrelationsfunktion ist ein zentrales Problem beim DLL. Wie in Kap. 1 beschrieben, lässt sich dadurch die aufwendige Extremwertsuche durch eine einfache Rückkoppelungsschaltung ersetzen. In seinem Buch [2] schreibt Lange auf S. 185, dass zur Bildung dieser speziellen Kreuzkorrelationsfunktion eine $\pi/2$-Phasenschiebung aller spektralen Anteile nötig sei. Dies ist ein bekanntes Problem der Einseitenbandmodulation und führt dort zur Hilberttransformation [7, S. 646], zu deren Durchführung physikalisch nicht realisierbare Netzwerke benötigt werden. In andern Publikationen, z.B. [8], [1] wird vorgeschlagen, ein Signal zu differenzieren. Der Differentiator ist aber ebenfalls physikalisch nicht realisierbar. Es ist das Ziel dieses Kapitels zu zeigen, dass die in der Literatur genannten Methoden nur Spezialfälle sind, und dass es möglich ist, eine ungerade Korrelationsfunktion durch lineare, zeitunabhängige, physikalisch realisierbare Netzwerke zu erzeugen. Wie wir später sehen werden, können die Pole und Nullstellen dieser Netzwerke zur Synthese optimaler Trackingsysteme verwendet werden. Es ist deshalb von Interesse, die allgemeine Lösung des gestellten Problems zu kennen.

2.1. ZEITKONTINUIERLICHE PROZESSE

Auf den Eingang der beiden Filter $h_1(t)$, $h_2(t)$ wirkt der schwach stationäre, mittelwertsfreie Zufallsprozess $x(t)$.

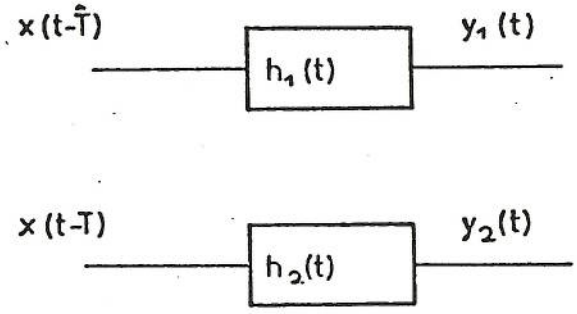


Fig. 2-1. Bildung der ungeraden Korrelationsfunktion

Korreliert man die beiden Ausgangssignale $y_1(t)$ und $y_2(t)$, so erhält man mit $\phi = T - \hat{T}$ das bekannte Resultat [9, S. 353].

$$R_{y_1,y_2}(\phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H_1(\omega) \cdot \overline{H_2}(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) \cdot \exp(i \cdot \omega \cdot \phi) \cdot d\omega \qquad (1)$$

Bedingungen an das Filterpaar für $R_{y_1,y_2}(\phi) = - R_{y_1,y_2}(-\phi)$

Wir spalten die Funktionen $H_1(\omega)$, $\overline{H}_2(\omega)$ in Real- und Imaginärteil auf.

$$H_1(\omega) = A_1(\omega) + i \cdot B_1(\omega)$$
$$\overline{H}_2(\omega) = A_2(\omega) - i \cdot B_2(\omega) \qquad (2)$$

Für das Produkt $H_1(\omega) \cdot \overline{H}_2(\omega)$ können wir dann schreiben

$$H_1(\omega)\cdot\overline{H}_2(\omega) = A_1(\omega)\cdot A_2(\omega) + B_1(\omega)\cdot B_2(\omega) + i\cdot\left[A_2(\omega)\cdot B_1(\omega) - A_1(\omega)\cdot B_2(\omega)\right] \qquad (3)$$
$$= A(\omega) + i\cdot B(\omega)$$

mit

$$A(\omega) \triangleq A_1(\omega)\cdot A_2(\omega) + B_1(\omega)\cdot B_2(\omega)$$
$$B(\omega) \triangleq A_2(\omega)\cdot B_1(\omega) - A_1(\omega)\cdot B_2(\omega) \qquad (4)$$

Da die Stossantworten reelle Funktionen sind, gilt

$$A_j(\omega) = A_j(-\omega)$$
$$B_j(\omega) = - B_j(-\omega) \qquad j = 1,2 \qquad (5)$$

Damit verifiziert man leicht, dass

$$A(\omega) = A(-\omega)$$
$$B(\omega) = - B(-\omega) \qquad (6)$$

Wegen

$$R_{xx}(\phi) = R_{xx}(-\phi) \qquad (7)$$

muss $S_{x,x}(\omega)$ eine reelle, gerade Funktion sein.

$$S_{xx}(\omega) = S_{xx}(-\omega) \qquad (8)$$

Damit sind wir in der Lage zu zeigen:

Notwendig und hinreichend für die Existenz einer ungeraden Korrelationsfunktion $Ry_1,y_2(\phi) = - Ry_1,y_2(-\phi)$ ist

$$A(\omega) \equiv 0$$
$$B(-\omega) = -B(\omega) \tag{9}$$

Wir beweisen zuerst, dass Bedingung (9) notwendig ist. Das Integral (1) lässt sich unter Zuhilfenahme von (3), in 4 Teilintegrale aufspalten

$$\begin{aligned} R_{y_1,y_2}(\phi) = {} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \phi)\, d\omega \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot \phi)\, d\omega \\ & + i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) \cdot \sin(\omega \cdot \phi)\, d\omega \\ & + i \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\omega) \cdot S_{xx}(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot \phi)\, d\omega \end{aligned} \tag{10}$$

Auf Grund der Symmetrieeigenschaften (6) verschwindet der Imaginärteil von (10). Da $Ry_1,y_2(\phi)$ für jedes $Sxx(\omega)$ eine ungerade Funktion sein soll, muss $A(\omega)$ notwendigerweise identisch verschwinden. Dass $B(\omega) = -B(\omega)$ ist folgt aus (6). Dass die Bedingung (9) auch hinreichend ist, bestätigt man leicht durch Einsetzen von (9) in (10).

Eigenschaften der Netzwerkpaare

Jede rationale Funktion der Form

$$H_1(\omega) \cdot \overline{H_2}(\omega) = i \cdot \omega\, a_0 \cdot \frac{\prod_{m=1}^{M \leq N-1} (i\omega + a_n) \cdot (i\omega - a_n)}{\prod_{m=1}^{N} (i\omega + b_m) \cdot (i\omega - b_m)} \tag{11}$$

erfüllt Bedingung (9). Aus Gründen der Realisierbarkeit ist der Grad des Zählerpolynoms höchstens gleich demjenigen des Nennerpolynoms [10, S.330] Falls die Pole und Nullstellen b_m resp. a_n komplex sind, muss auch der konjugiert komplexe Wert vorhanden sein. Die Lage der Pole und Nullstellen des Produktes $H_1(\omega) \cdot \overline{H}_2(\omega)$ ist in der folgenden Figur dargestellt.

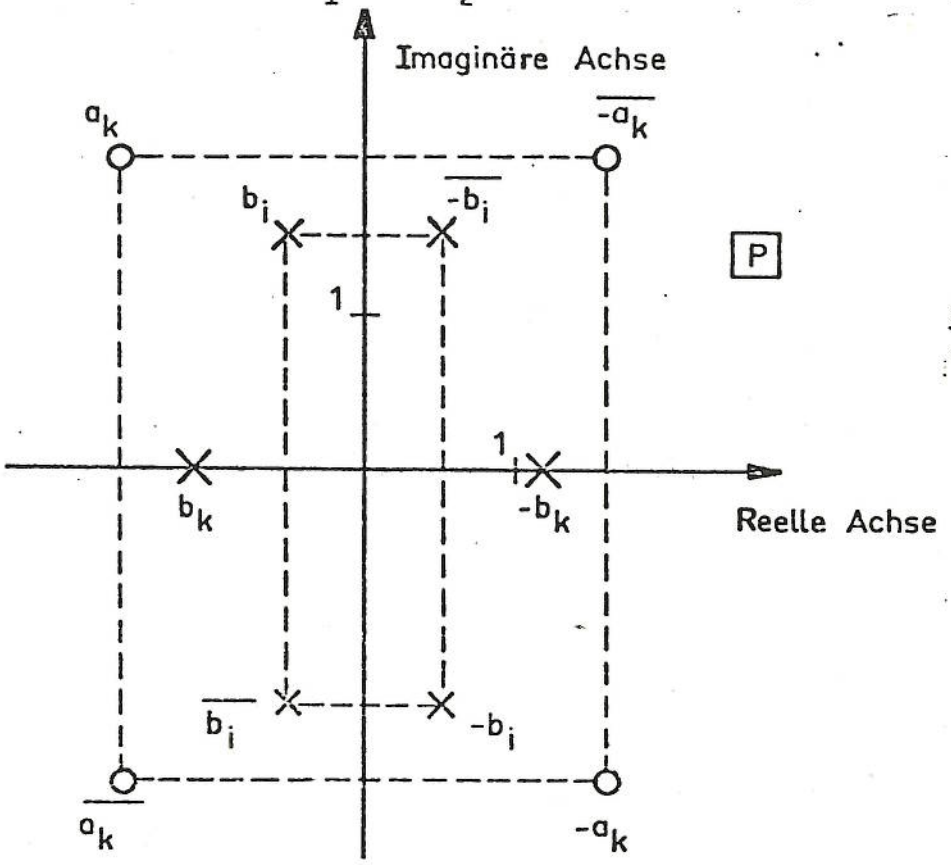


Fig. 2-2. Verteilung der Pole und Nullstell

Die Pol- und Nullstellenverteilung ist symmetrisch zur rein imaginären Achse. Für konjugiert komplexe Grössen besteht ebenfalls eine zur reellen Achse. Bei der Aufteilung der einzelnen Faktoren der rationalen Funktion (11) auf die zwei Filter müssen folgende Gesichtspunkte beachtet werden:

1. Alle Pole der Filter $H_1(\omega)$, resp. $H_2(\omega)$ müssen in der linken Halbebene liegen.
2. Die Nullstellen können beliebig verteilt sein.
3. Der Grad des Zählerpolynoms darf höchstens gleich demjenigen des Nenners sein.

Aus Punkt 1 und (11) folgt, dass die beiden Filter die gleichen Pole haben. Die Nullstellen dürfen, unter Beachtung von Punkt 3, beliebig verteilt werden. Wie auch immer die Nullstellen zugeordnet werden, besteht eine exakte $\pi/2$-Phasendifferenz zwischen den Spektren der beiden Signale. Eine besonders wichtige Möglichkeit der Aufteilung der Pole und Nullstellen von (11) ist

$$H_2(\omega) = \frac{\prod_{n=1}^{M \leq N-1} (i\omega + a_n)}{\prod_{m=1}^{N} (i\omega + b_m)} \cdot (-1)^{M-N} \qquad (12)$$

$$H_1(\omega) = i \cdot \omega \cdot a_0 \cdot \frac{\prod_{n=1}^{M \leq N-1} (i\omega + a_n)}{\prod_{m=1}^{N} (i\omega + b_m)}$$

Zwischen den beiden Netzwerkpaaren besteht dann der einfache Zusammenhang

$$H_1(\omega) = i\omega \cdot a_0 \cdot (-1)^{N-M} \cdot H_2(\omega)$$

Dieses Resultat lässt sich sehr anschaulich deuten. In beiden Kanälen werden die Signale durch das gleiche Filter $H_1(\omega)$ verformt. Die ungerade Korrelationsfunktion $Ry_1,y_2(\phi)$ wird nur durch den - für sich allein nichtrealisierbaren - idealen Differentiator

$$H(\omega) = i \cdot \omega \cdot a_0 \qquad (13)$$

erzeugt.

Aus (11) könnte man schliessen, dass die einfachste Lösung das Filterpaar

$$H_1(\omega) = i \cdot \omega \cdot a_0$$
$$H_2(\omega) = 1 \qquad (14)$$

wäre. Das erste Filter verletzt aber die Bedingung der physikalischen

Realisierbarkeit [7, S. 648]. Versucht man mit nur einem Filter die gewünschte ungerade Korrelationsfunktion zu erzeugen, stösst man ebenfalls auf ein unrealisierbares Netzwerk. Ein Blick auf Fig. 2 - 2 lehrt, dass ein solches Filter Pole entweder auf der rein imaginären Achse oder dann sowohl in der linken wie rechten Halbebene haben muss.

Beispiel 1

Der Hilberttransformator besitzt die Uebertragungsfunktion

$$H_1(\omega) = i \cdot \operatorname{sign}(\omega) \tag{15}$$

und erfüllt (11), ist aber ebenfalls physikalisch nicht realisierbar.

Beispiel 2

Für das einfachste, realisierbare Netzwerkpaar gilt

$$H_1(\omega)\cdot\overline{H_2}(\omega) = i\omega a_0 \frac{1}{(i\omega+b_1)\cdot(i\omega-b_1)} \tag{16}$$

mit

$$A(\omega) \equiv 0$$

$$B(\omega) = \omega a_0 \frac{1}{(\omega^2+b_1^2)} \tag{17}$$

Eine mögliche Aufspaltung des Produktes ist

$$H_1(\omega) = \frac{i\omega \cdot a_0}{(i\omega + b_1)}$$

$$\overline{H_2}(\omega) = \frac{1}{(i\omega - b_1)}$$

$$\Longrightarrow \quad H_2(\omega) = -\frac{1}{(i\omega + b_1)} \tag{18}$$

$H_1(\omega)$ ist die bekannte Näherung für den Differentiator, $H_2(\omega)$ ist ein Tiefpass und dient zur Korrektur des Approximationsfehlers. Fig. 2 - 3 zeigt eine mit diesem Filterpaar experimentell ermittelte Korrelationsfunktion. Die Eingangsgrössen sind wirkliche"Schienensignale".

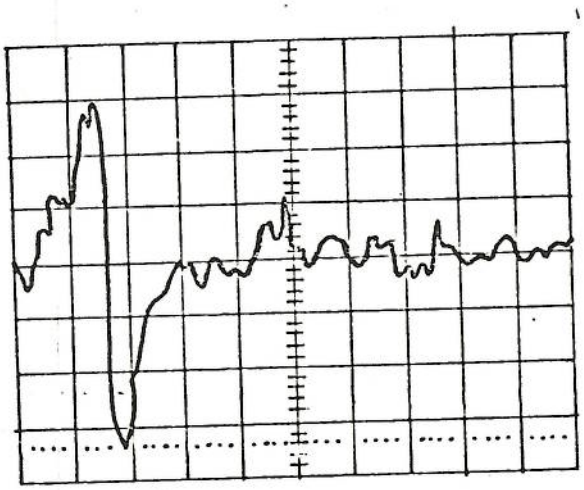


Fig. 2-3. Experimentell ermittelte, ungerade Korrelationsfunktion

2.2. ZEITDISKRETE PROZESSE

Auf den Eingang der beiden linearen Digitalfilter $h_1(k)$, $h_2(k)$ wirkt die stationäre, mittelwertsfreie Zufallssequenz $x(k)$. Der erste Signalpfad sei gegenüber dem zweiten um

$$\phi \triangleq T - \hat{T} = \frac{1}{f_p} \cdot (n + \varepsilon)$$
$$n = 0, \pm 1, \cdots \quad ; \quad -1 < \varepsilon < 1 \qquad (19)$$
f_p : Abtastfrequenz

verschoben.

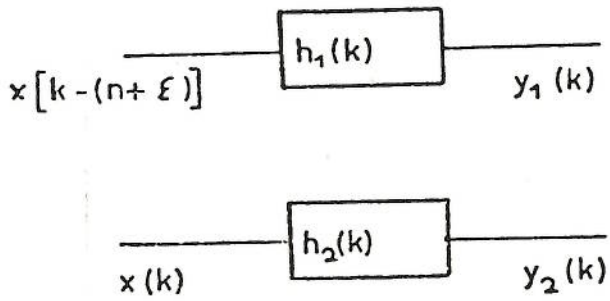


Fig. 2-4. Bildung der ungerade Korrelationsfunktion

Um auch Verzögerungen, die nicht ganzzahlige Vielfache der Abtastdauer 1/fp sind, betrachten zu können, führen wir die reelle Variable ε ein. Die Korrelationsfunktion der beiden Sequenzen $y_1(k)$ und $y_2(k)$ ist im stationären Zustand durch die Doppelsumme

$$R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h_1(l) \cdot h_2(m) \cdot R_{x,x}(m+n+\varepsilon-l) \tag{20}$$

mit

$$R_{x,x}(m+n+\varepsilon-l) \triangleq E\left[x(k-(m+n+\varepsilon)) \cdot x(k-l)\right]$$

gegeben.

Bedingungen an das Filterpaar für eine ungerade Korrelationsfunktion $R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon)$.

Am klarsten lassen sich die geforderten Bedingungen mit Hilfe der zweiseitigen z-Transformation darstellen. Die zweiseitige z-Transformierte einer Sequenz f(k), $k \in [-\infty,\infty]$, definiert man wie folgt

$$S(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot z^{k} \quad * \tag{21}$$

Man findet dann für die Transformierte von $R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon)$

$$S_{y_1,y_2}(z,\varepsilon) = H_1(z) \cdot H_2(1/z) \cdot S_{x,x}(z,\varepsilon) \tag{22}$$

darin bedeuten

---

* Vielfach definiert man

$$S(z) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) \cdot z^{-k}$$

$$H_1(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} h_1(k) \cdot z^k$$

$$H_2\left(\frac{1}{z}\right) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} h_2(k) \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^k \qquad (23)$$

$$S_{xx}(z,\varepsilon) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k+\varepsilon) \cdot z^k$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon)$ berechnet sich aus (23) mit Hilfe der Cauchy'schen Integralformel [11]

$$R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \oint_C \frac{H_1(z) \cdot H_2(1/z) \cdot S_{xx}(z,\varepsilon)}{z^{n+1}} \, dz \qquad (24)$$

Der Integrationsweg C sei der Einheitskreis, der im mathematisch positiven Sinne durchlaufen werde. (Wir werden später sehen, dass der Einheitskreis tatsächlich im Innern des Konvergenzbereiches der Potenzreihe (22) liegt)

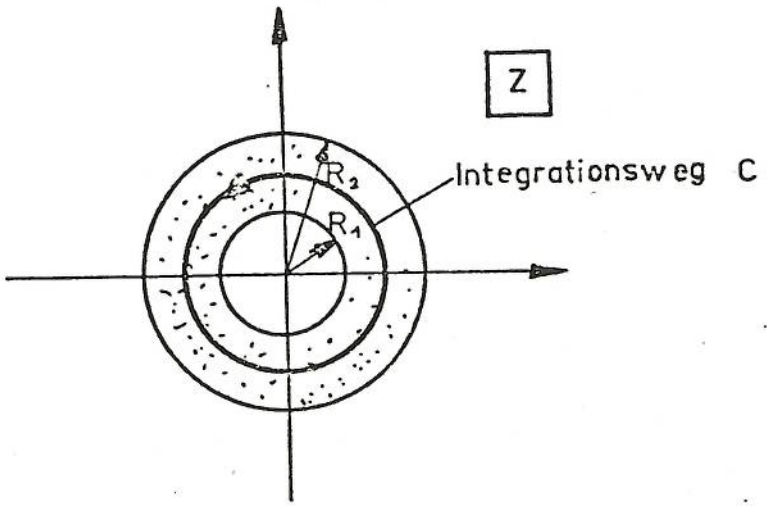


Fig. 2-5. Konvergenzbereich der zweiseitigen z-transformierten $S_{y_1,y_2}(z,\varepsilon)$

Die Funktion $R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon)$ erhalten wir am einfachsten, wenn wir zuerst $R_{y_1,y_2}(n-\varepsilon)$ berechnen. Definitionsgemäss ist

$$S_{y_1,y_2}(z,-\varepsilon) = H_1(z) \cdot H_2(1/z) \cdot S_{xx}(z,-\varepsilon) \qquad (25)$$

mit

$$S_{xx}(z,-\varepsilon) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{xx}(k-\varepsilon)\cdot z^{k}$$

Daraus

$$R_{y_1,y_2}(n-\varepsilon)=\frac{1}{2\pi\cdot i}\oint_{C}\frac{H_1(z)\cdot H_2(1/z)\cdot S_{xx}(z,-\varepsilon)\cdot dz}{z^{n+1}} \qquad (26)$$

Ersetzen wir n durch (-n) finden wir unsere gewünschte Funktion

$$R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon)=\frac{1}{2\pi\cdot i}\cdot\oint_{C}\frac{H_1(z)\cdot H_2(1/z)\cdot S_{xx}(z,-\varepsilon)\cdot dz}{z^{-n+1}} \qquad (27)$$

Wir substituieren die komplexe Integrationsvariable z durch ihren Reziprokwert

$$w=\frac{1}{z} \quad\Longrightarrow\quad dw=-\left(\frac{1}{z}\right)^{2}\cdot dz \qquad (28)$$

Der Integrationsweg C ist, auch für die neue Variable w, der Einheitskreis, der aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufen wird, denn

$$\begin{aligned} z(\varphi) &= \exp(i\cdot\varphi) \\ w(\varphi) &= \frac{1}{z(\varphi)} = \exp(-i\cdot\varphi) \quad ; \quad 0\le\varphi\le 2\pi \end{aligned} \qquad (29)$$

Nach einigen Umformungen finden wir

$$R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon)=-\frac{1}{2\pi i}\cdot\oint_{C}\frac{H_1(1/w)\cdot H_2(w)\cdot S_{xx}(1/w,-\varepsilon)\cdot dw}{w^{n+1}} \qquad (30)$$

Aendern wir die Umlaufsrichtung des Integrals, so ändert sich das Vorzeichen und kompensiert das Minuszeichen in (30)

$$R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{H_1(1/w)\cdot H_2(w)\cdot S_{x,x}(1/w,\varepsilon)}{w^{n+1}}\, dw \qquad (31)$$

Definitionsgemäss ist

$$S_{x,x}(1/w,-\varepsilon) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{x,x}(k-\varepsilon)\cdot\left(\frac{1}{w}\right)^k \qquad (32)$$

Ersetzt man $k \longrightarrow -k$ und benützt die Symmetrieeigenschaft

$$R_{x,x}(-n-\varepsilon) = R_{x,x}(n+\varepsilon) \qquad (33)$$

so ergibt sich

$$S_{x,x}(1/w,-\varepsilon) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{x,x}(k+\varepsilon)\cdot w^k = S_{x,x}(w,\varepsilon) \qquad (34)$$

Damit wird schlussendlich

$$R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C} \frac{H_1(1/w)\cdot H_2(w)\, S_{x,x}(w,\varepsilon)}{w^{n+1}}\, dw \qquad (35)$$

Falls

$$R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon) = -\, R_{y_1,y_2}(-n-\varepsilon) \qquad (36)$$

für ein beliebiges $S_{x,x}(z,\varepsilon)$ gelten soll, so muss nach (35) und (24) zwischen den beiden Filtern notwendigerweise die Relation

$$H_1(z)\cdot H_2(1/z) = -\, H_1(1/z)\cdot H_2(z) \qquad (37)$$

erfüllt sein. Dass die Bedingung auch hinreichend ist, sieht man sofort durch Einsetzen von (37) in (35). Unser gesuchtes Resultat lautet also:

Eine hinreichende notwendige Bedingung an das Netzwerkpaar für die Existenz einer ungeraden Korrelationsfunktion ist

$$H_1(z) \cdot H_2(1/z) = - H_1(1/z) \cdot H_2(z) \tag{38}$$

Eigenschaften der Filterpaare

Wir schreiben das Produkt

$$G(z) = H_1(z) \cdot H_2(1/z) \tag{39}$$

als gebrochen rationale Funktion mit reellen Koeffizienten

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot z^k}{\sum_{k=0}^{M} d_k \cdot z^k} \tag{40}$$

Ersetzt man $z \rightarrow 1/z$ so erhält man

$$G(1/z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_{N-k} \cdot z^k}{\left(\sum_{k=0}^{M} d_{M-k} \cdot z^k \right) \cdot z^{N-M}} \tag{41}$$

Für die weitere Diskussion nehmen wir vorläufig an $N \geq M$.* Durch Koeffizientenvergleich der Zähler- und Nennerpolynome von (40) und (41) findet man sofort

$$d_k = 0 \quad , \quad 0 \leq k < N-M \tag{42}$$

* Die Diskussion für $N \leq M$ verläuft vollkommen analog.

und damit

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} c_k \cdot z^k}{\left(\sum_{k=0}^{2M-N} \tilde{d}_k \cdot z^k\right) \cdot z^{N-M}} \qquad (43)$$

$$\tilde{d}_k \triangleq d_{k+(N-M)}; \quad M \geq \frac{N}{2}$$

Wegen der Relation G(z) = - G(1/z) bestehen zwischen den einzelnen Koeffizienten auch die Beziehungen

$$c_k = -c_{N-k}$$
$$\tilde{d}_k = \tilde{d}_{2M-N-k}$$

Für den Fall eines ungeraden N lässt sich (43) deshalb in der Form

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} c_k \cdot z^k \cdot (1 - z^{N-2k})}{\sum_{k=0}^{M-\frac{N+1}{2}} \tilde{d}_k \cdot z^k \cdot (1 + z^{2\cdot(M-k)-N}) \cdot z^{N-M}} \qquad (44)$$

darstellen. Da der Exponent 2 · (M-k) - N für ein ungerades N aber immer ungerade ist, hat das Nennerpolynom bei z = -1 einen Pol. Aus Stabilitätsgründen scheidet der Fall mit ungeraden N somit aus, und wir dürfen für die weitere Diskussion N als gerade annehmen. In diesem Falle gilt für G(z)

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} c_k \cdot z^k \cdot (1 - z^{N-2k})}{\sum_{k=0}^{M-\frac{N}{2}} \tilde{d}_k \cdot z^k \cdot (1 + z^{2(M-k)-N}) \cdot z^{N-M}} \qquad (45)$$

Das Zählerpolynom hat unabhängig von den Koeffizienten c_k, Nullstellen bei z = ± 1. Zerlegt man die rationale Funktion (45) in ihre Linearfaktoren, so muss diese Beziehung notwendigerweise die Gestalt annehmen

$$G(z) = (z-1)\cdot(z+1)\cdot \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (z-a_k)\cdot\left(z-\frac{1}{a_k}\right)}{\prod_{k=0}^{M-\frac{N}{2}} (z-b_k)\cdot\left(z-\frac{1}{b_k}\right)\cdot z^{N-M}} \qquad (46)$$

Sofern die Pole oder Nullstellen komplex sind, so müssen, nach einem bekannten Satz der Algebra, auch immer die konjugiert komplexen Grössen vorhanden sein. Mit Hilfe von (45) findet man für N = 2 entweder (M = 1)

$$G(z) = (z-1)(z+1)\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{c_0}{2\tilde{d}_0} \qquad (47)$$

oder (M = 2)

$$G(z) = (z-1)(z+1)\cdot\frac{1}{\tilde{d}_0(1+z^2)+2\tilde{d}_1 z} \qquad (48)$$

Die Pol- und Nullstellenverteilung von G(z) ist in Fig. 2 - 6 dargestellt.

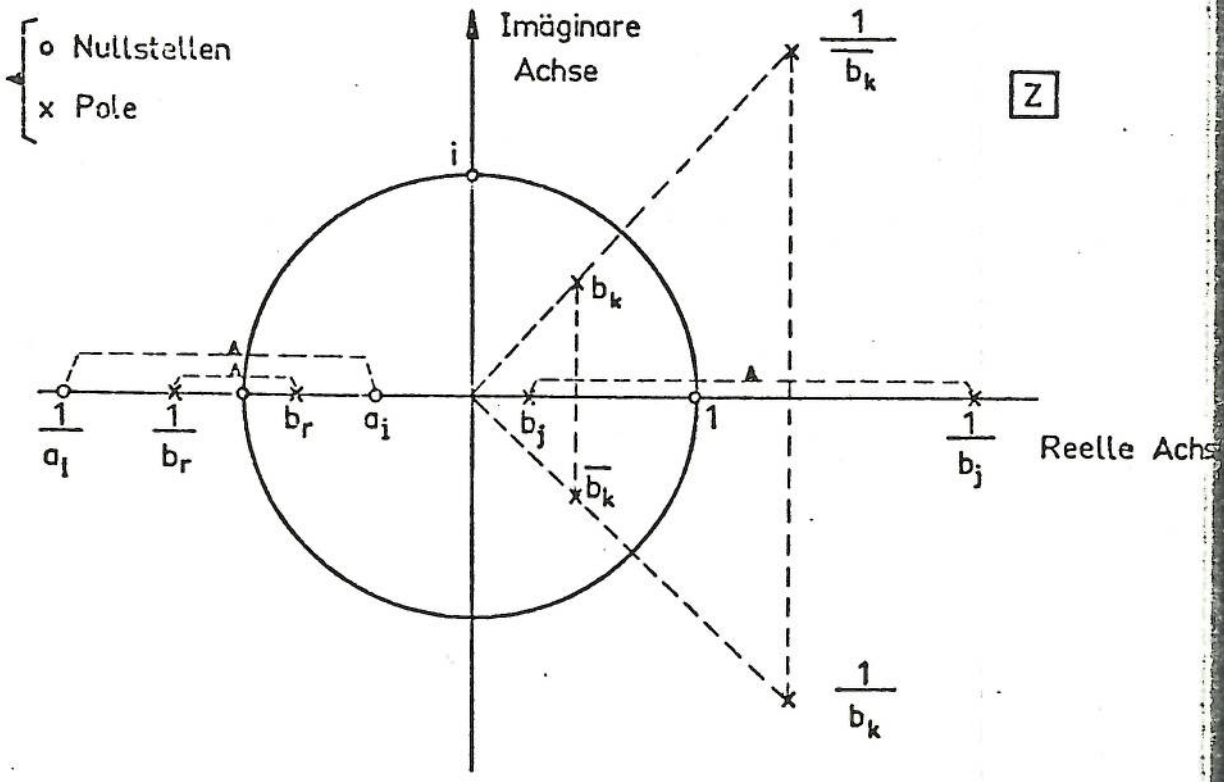


Fig. 2-6. Pol- und Nullstellenverteilung im zeitdiskreten Fall

Aus Stabilitätsgründen müssen alle Pole der Filter $H_1(z)$, $H_2(z)$ innerhalb des Einheitskreises liegen. Für die Nullstellen bestehen keine solchen Vorschriften. Die Zuordnung der Nullstellen zu den einzelnen Filtern ist beliebig, da der Grad des Zählerpolynoms höher sein darf als derjenige des Nenners. In jedem Falle besteht eine exakte $\pi/2$ - Phasendifferenz zwischen den Spektren der Signale $y_1(k)$ und $y_2(k)$.

Ein sehr anschaulich interpretierbares Resultat ergibt für N = M die Aufteilung

$$H_1(z) = (z-1)\cdot(z+1)\cdot \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(z-a_k)}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}}(z-b_k)} \qquad (49)$$

$$H_2\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}\left(z-\frac{1}{a_k}\right)}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}}\left(z-\frac{1}{b_k}\right)} \qquad (50)$$

Ersetzen wir die Variable 1/z durch z, so resultiert nach einigen Manipulationen

$$H_2(z) = K_p \cdot z^{-1}\cdot \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}(z-a_k)}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}}(z-b_k)} \qquad (51)$$

mit

$$K_p = \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1}-\frac{1}{a_k}}{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}}-\frac{1}{b_k}} \qquad (52)$$

Genau gleich wie bei den Analogfiltern, werden die Signale in beiden Kanälen durch das gleiche Netzwerk

$$H_c(z) = \frac{\prod_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (z - a_k)}{\prod_{k=0}^{N/2} (z - b_k)} \qquad (53)$$

verformt. Die ungerade Korrelationsfunktion wird nur durch die Filter mit der Uebertragungsfunktion $(z^2 - 1)$ in Kanal 1 und $K_p \cdot z$ im andern Signalpfad erzeugt.

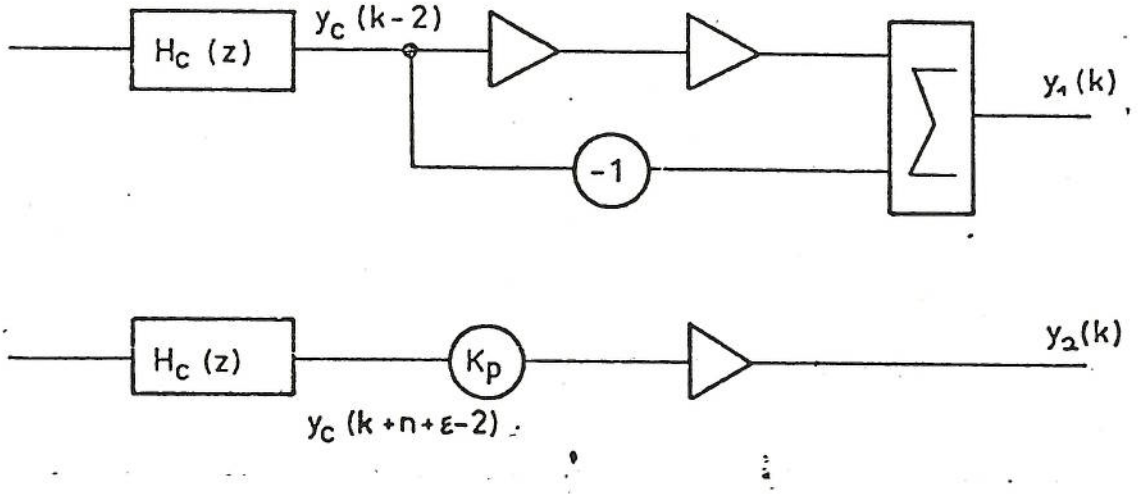


Fig. 2-7. Bildung der ungeraden Korrelationsfunktion bei symmetrischer Aufteilung

Im Zeitbereich entspricht der Uebertragungsfunktion $z^2 - 1$ Differenzbildung der Abtastwerte

$$y_1(k) = y_c(k) - y_c(k-2) \qquad (54)$$

während $K_p \cdot z$ Multiplikation mit einer konstanten K_p und Verzögerung um einen Takt bedeutet.

$$y_2(k) = K_p \cdot y_c(k-1) \qquad (55)$$

Beispiel 3

Das einfachste Netzwerkpaar mit den gewünschten Eigenschaften ist (N = 2, M = 1)

$$G(z) = (z^2-1)\cdot\frac{1}{z} \tag{56}$$

Daraus

$$\begin{aligned} H_1(z) &= z^2 - 1 \\ H_2(1/z) &= 1/z \quad \Rightarrow H_2(z) = z \end{aligned} \tag{57}$$

Die zu (57) korrespondierenden Rekursionsgleichungen sind

$$\begin{aligned} y_1(k) &= x(k) - x(k-2) \\ y_2(k) &= x(k-1+n+\varepsilon) \end{aligned} \tag{58}$$

Ersetzen wir in der ersten Rekursionsgleichung k durch $(\ell + 1)$ und dividieren beide Seiten durch h so erhalten wir

$$y_1(\ell-1)\cdot\frac{1}{h} = \frac{y_c(\ell+1) - y_c(\ell-1)}{h} \quad ; \quad h \triangleq 2\cdot\frac{1}{f_p} \tag{59}$$

Der Differenzenquotient auf der rechten Seite ist aber nichts anderes als die numerische Approximation des Differentialquotienten dy_1/dt. Genau gleich wie beim zeitkontinuierlichen Fall finden wir in einem der beiden Signalpfade einen "Differentiator". Durch Multiplikation der beiden Sequenzen von (58) und anschliessende Mittelwertbildung finden wir für die Korrelationsfunktion

$$R_{y_1,y_2}(n+\varepsilon) = R_{xx}(n+\varepsilon-1) - R_{xx}(n+\varepsilon+1) \tag{60}$$

Gleichung (60) zeigt, dass man im einfachsten Fall nur zwei um 2·1/fp verschobene Punkte der Autokorrelationsfunktion Rx,x berechnen muss. Wegen der geraden Symmetrie von Rx,x(n + ε) verschwindet die Differenz für n + ε = 0. Wegen ihrer grossen Einfachheit findet man diese Lösung in vielen praktischen Anwendungen, z.B. [4], [8], [12].

Beispiel 4

Für $M = \frac{N}{2}$, $\tilde{d}_0 = 1$ nimmt (45) die Gestalt

$$G(z) = \frac{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} c_k \cdot z^k \left(1 - z^{N-2k}\right)}{z^{\frac{N}{2}}} \tag{61}$$

an. Mit

$$H_2(z) = z^{\frac{N}{2}} \tag{62}$$

entspricht

$$H_1(z) = \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} c_k \cdot z^k \left(1 - z^{N-2k}\right) \tag{63}$$

einem nichtrekursiven Digitalfilter.

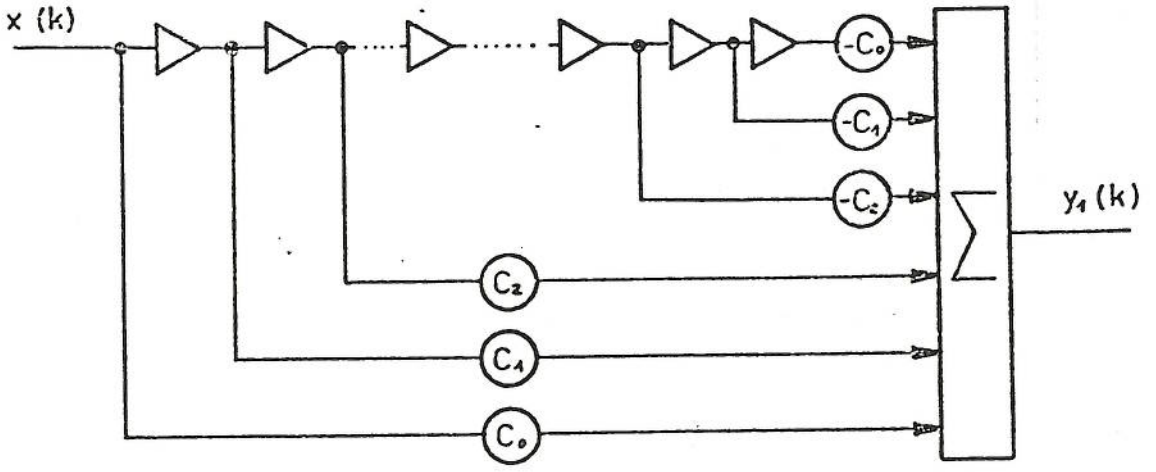


Fig. 2-8. Bildung der ungeraden Korrelationsfunktion durch ein nichtrekursives Digitalfilter

Beispiel 5

Das einfachste Digitalfilter mit M = N = 2 ist

$$H_1(z) = (z^2 - 1) \cdot \frac{1}{(z - b_1)}$$

$$H_2(1/z) = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{b_1}\right)} \Rightarrow H_2(z) = -b_1 \cdot z \cdot \frac{1}{(z - b_1)} \qquad (64)$$

Die entsprechenden Differenzengleichungen lauten

$$y_1(k) = \frac{1}{b_1} \cdot \left[y_1(k-1) - x(k-2) + x(k) \right]$$

$$y_2(k) = \frac{1}{b_1} \cdot y_2(k-1) + x(k-1) \qquad (65)$$

Der gemeinsame Faktor

$$H_c(z) = \frac{1}{(z - b_1)}$$

entspricht einem digitalen Tiefpass.

3. MATHEMATISCHE BESCHREIBUNG DES REGELKREISES

3.1. AUFBAU DES REGELKREISES

Die wichtigsten Funktionsblöcke eines analogen DLL sind in Fig. 3 - 1 dargestellt.

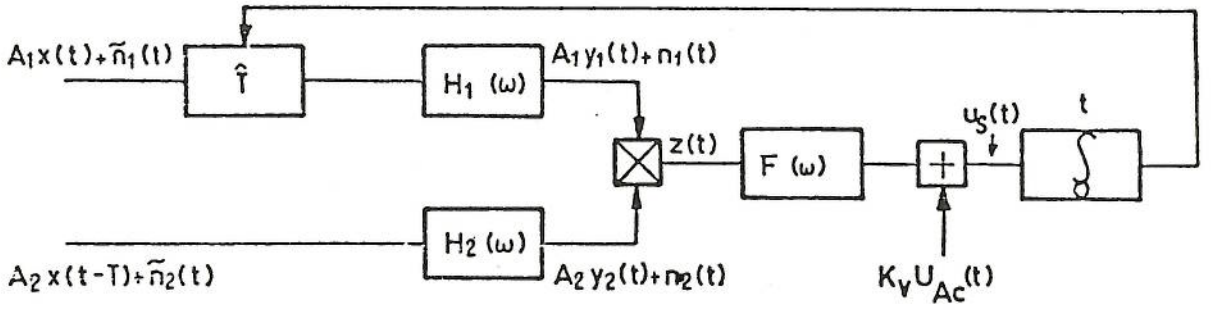


Fig. 3-1. Blockschaltbild und Signale des analogen DLL

Wie diese Figur zeigt, haben wir einen nichtlinearen Regelkreis mit Multiplikator, linearem Tiefpassfilter $F(\omega)$, dem Netzwerkpaar $H_1(\omega)$, $H_2(\omega)$ zur Erzeugung des ungeraden Korrelationsfunktion und einer regelbaren Verzögerungsleitung, deren Aenderungsgeschwindigkeit $d\hat{T}/dt$ eine lineare Funktion der Steuerspannung $u_s(t)$ sei

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = K \cdot u_s(t) \qquad (1)$$

Es ist zu beachten, dass am Ausgang einer passiven, verlustlosen Verzögerungsleitung mit $x(t)$ als Eingangsgrösse nicht $x(t - \hat{T})$, sondern

$$y(t) = \sqrt{1 - \frac{d\hat{T}}{dt}} \cdot x(t-\hat{T}) \qquad (2)$$

erscheint [4, S. 1404]. Der Wurzelfaktor $\sqrt{1 - d\hat{T}/dt}$ bewirkt, dass Eingangs- und Ausgangsenergie gleich sind. In den meisten praktischen Anwendungen ist die Ungleichung

$$\frac{d\hat{T}}{dt} \ll 1 \qquad \text{(Annahme 1)} \qquad (3)$$

erfüllt, und wir können diesen Effekt vernachlässigen. Wir werden bei der Analyse sehen, dass der Regelkreis - auch bei Vernachlässigung dieses Effektes - nur dann funktionsfähig ist, wenn tatsächlich $d\hat{T}/dt \ll 1$ ist. Steuerbare Verzögerungsleitungen lassen sich auf verschiedene Arten realisieren, z. B. durch eine Ferrit-Kern-Verzögerungsleitung mit magnetisch gesteuerter Permeabilität oder durch Ultraschallverzögerunfsleitungen [4]. In der Praxis findet man meistens einen AGC in beiden Signalkanälen um eine konstante Leistung am Eingang des Regelkreises zu haben. Für die weitere Untersuchung wollen wir aber annehmen, dass die Signalleistung P_1, P_2 der beiden Kanäle

$$P_1 = A_1^2 \quad ; \quad P_2 = A_2^2 \qquad (4)$$

(Annahme 2)

konstant sei. Der Einfluss des AGC wird in [4] diskutiert. Die Akquisitionsspannung $u_{ac}(t)$ dient zur Beschleunigung des Suchvorganges; im Tracking Modus ist sie Null.

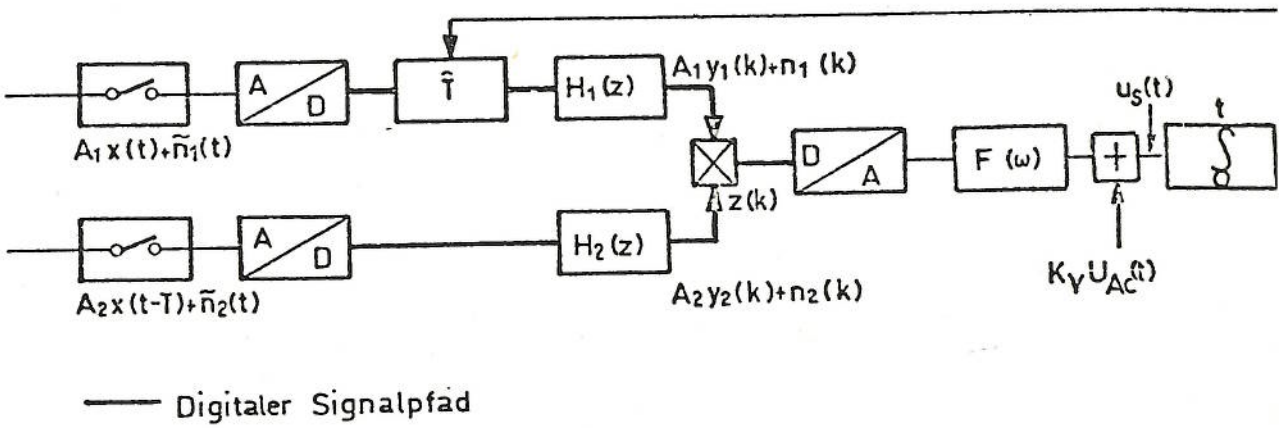


Fig. 3-2. Blockschaltbild und Signal des digitalen DLL

Im Blockschema des digitalen DLL finden wir die gleichen Funktionsblöcke wie beim analogen DLL. Zusätzlich sind noch Abtaster, A/D- und D/A-Wandler vorhanden. Im Gegensatz zu zeitkontinuierlichen, variablen Verzögerungsleitungen lassen sich Verzögerungen von Abtastwerten durch Schieberegister oder Eimerkettenspeicher mit variabler Abtastfrequenz technisch einfach bewerkstelligen. Dabei ist allerdings zu beachten, dass $\hat{T}$ während der Durchlaufzeit $\hat{T}$ nur wenig ändern darf.

$$\frac{d\hat{T}}{dt} \cdot \hat{T} \ll \hat{T} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\hat{T}}{dt} \ll 1 \qquad (5)$$

damit das Schieberegister angenähert das Verhalten einer Verzögerungsleitung hat. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, können Oszillationen des Regelkreises auftreten. Da die Frequenz fp wertekontinuierlich ist und wegen $d\hat{T}/dt \ll 1$, begehen wir einen vernachlässigbaren Fehler, wenn wir auch für den digitalen DLL das Steuergesetz

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = K \cdot u_s(t) \qquad (6)$$

annehmen. Damit sind wir in der Lage, beide Regelkreise durch Differentialgleichungen (statt in einem Fall Differenzengleichungen) zu beschreiben. Dies ist für die folgende Analyse von grosser Wichtigkeit, da man in beiden Fällen die Fokker-Planck Methode anwenden kann.

3.2. EIGENSCHAFTEN DER STOERSIGNALE

Störsignale können additiv oder multiplikativ einwirken. Multiplikative Störungen entstehen beispielsweise durch den AGC und verursachen einen systematischen Messfehler, da die Kreuzkorrelationsfunktion $R_{y_1,y_2}(\phi)$ ihre Symmetrie verliert. Auch ein Uebersprechen der beiden Signalkanäle führt zu systematischen Messfehlern. Additive Störungen entstehen durch Verstärkerrauschen, Quantisierungsfehler, Rüttelbewegungen des Vehikels und thermisches Rauschen der LED und Photodioden bei der berührungslosen v-Messung, um nur einige für den DLL typische Möglichkeiten zu nennen. Solche additiven Störungen führen zu einer Vergrösserung der Streuung von ϕ, nicht aber zu systematischen Fehlern, da sie mit dem Nutzsignal unkorreliert sind. Während den weiteren Untersuchungen - mit Ausnahme von Kap. 8 - wollen wir nur noch solche mittelwertfreie, gegenseitig und mit dem Nutzsignal x unkorrelierte Störprozesse n_1, n_2 berücksichtigen.

$$E[n_k(t)] = 0 \quad ; \quad j \neq k \;,\; j,k = 1,2$$
$$E[n_k(t) \cdot n_j(t)] = 0 \quad ; \quad E[n_k(t) \cdot x(t)] = 0 \qquad (7)$$

(Annahme 3)

3.3. BESCHREIBUNG DES PRODUKTPROZESSES Z FUER ZEITKONTINUIERLICHE SIGNALE

Mittelwert

Wegen der Annahme 3 gilt für den (ev. zeitabhängigen) Mittelwert $E[z(t)]$

$$E[z(t)] = A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int h_1(t-\nu)\, h_2(t-\xi)\, E\left\{x[\nu-\hat{T}(\nu)]\cdot x[\xi-T(\xi)]\right\} d\nu\, d\xi \qquad (8)$$

Der Mittelwert $E\left\{x[\nu-\hat{T}(\nu)]\cdot x[\xi-T(\xi)]\right\}$ wird durch die statistischen Eigenschaften des Prozesses x und die Dynamik von T(t) bestimmt. Wir wollen annehmen, dass der Prozess x stationär sei. Im allgemeinen sind T und $\hat{T}$ keine Konstanten und daher ist $E\left\{x[\nu-\hat{T}(\nu)]\cdot x[\xi-T(\xi)]\right\}$ - trotz der Stationarität von x - nicht nur von der Differenz der Argumente abhängig. Den Einfluss der Zeitabhängigkeit von $T, \hat{T}$ kann man am besten erkennen, wenn man den Integranden in der (ν, ξ) Ebene aufzeichnet. Auf der ν, resp. ξ Achse ist die Stossantwort des Filters 1, resp. 2 aufgezeichnet.

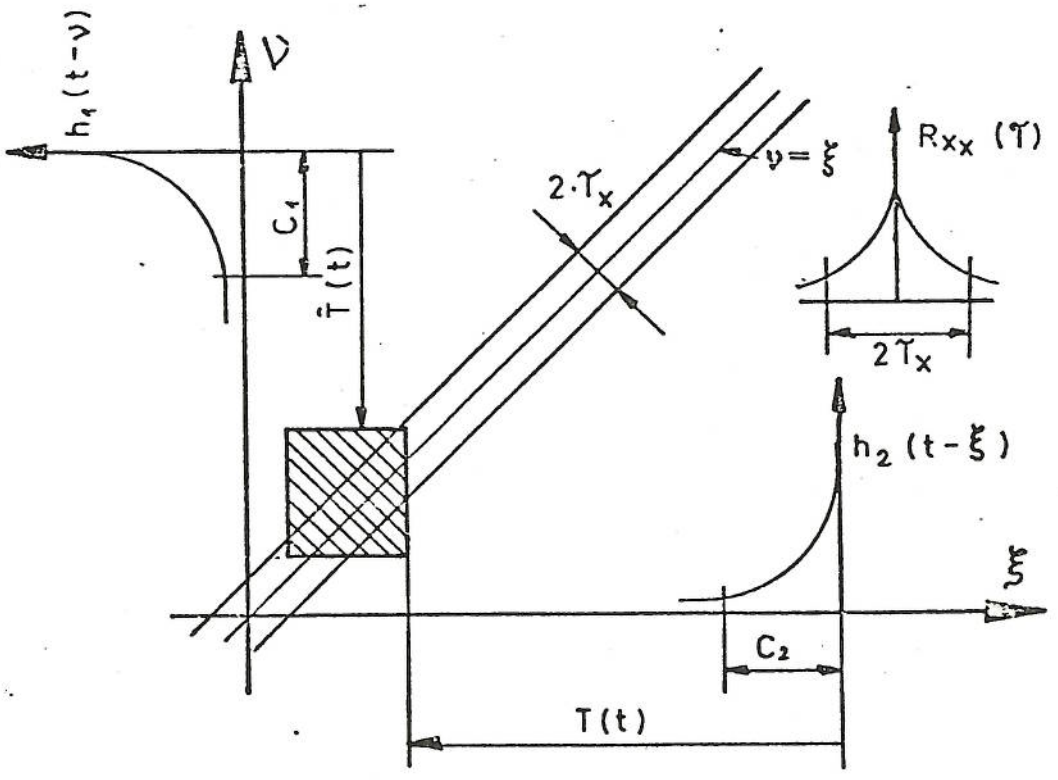


Fig. 3-3. Einfluss der Zeitabhängigkeit von $T, \hat{T}$ auf E(z)

Die Funktion $E\{x[\nu-\hat{T}(\nu)]\cdot x[\xi-T(\xi)]\}$ ist nur in der Umgebung von $\nu-\hat{T}(\nu)-\xi-T(\xi)$ wesentlich von Null verschieden. Die Stossantwort der beiden Filter ist ebenfalls nur für eine endliche Zeit, hier mit c_1 resp. c_2 angenommen, wesentlich von Null verschieden. Daher liefert zur Zeit t nur die schraffierte Teilfläche $c_1 \cdot c_2$ einen wesentlichen Beitrag zum Doppelintegral. Daraus folgt, dass die Zeitabhängigzeit von T und $\hat{T}$ genau dann vernachlässigt werden darf, falls gilt

$$\frac{d\hat{T}}{dt}\cdot c_k \ll \hat{T} \qquad k=1,2$$
$$\frac{dT}{dt}\cdot c_k \ll T \qquad \text{(Annahme 4)} \tag{9}$$

In diesem Falle ist der Mittelwert von x nur noch von der Differenz der Argumente abhängig. Damit wird

$$E[z(t)] = A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int h_1(t-\nu)\cdot h_2(t-\xi)\cdot R_{x,x}(\nu-\xi-\Phi)\,d\nu\,d\xi \tag{10}$$

Die rechte Seite von (10) ist nunmehr identisch mit der ungeraden Korrelationsfunktion $R_{y_1,y_2}(\Phi)$ für stationäre Prozesse. Für die weitere Analyse ist es vorteilhaft, $E(z)$ als Produkt einer auf 1 normierten Funktion $g(\Phi)$ mit einer konstanten A zu schreiben.

$$A\cdot g(\Phi) \triangleq A_1 A_2 R_{y_1,y_2}(\Phi) = E(z) \tag{11}$$

Leistungsdichtespektrum und Intensitätskoeffizient

Es bleibt uns noch, den Rauschprozess

$$n(t,\Phi) \triangleq z(t) - E[z(t)] \tag{12}$$

zu beschreiben. Insbesondere werden wir zu einem späteren Zeitpunkt das Leistungsdichtespektrum $S_{n,n}(\omega,\Phi)$ kennen müssen. Am bequemsten lässt sich diese Funktion via Korrelationsfunktion $R_{n,n}(\tau,\Phi)$ berechnen.

$$R_{n,n}(\tau,\Phi) = R_{z,z}(\tau,\Phi) - E^2[z] \tag{13}$$

Definitionsgemäss ist

$$R_{z,z}(\tau,\phi) = E\Big\{\Big[A_1 y_1(t)+n_1(t)\Big]\cdot\Big[A_2 y_2(t)+n_2(t)\Big] \cdot\Big[A_1 y_1(t+\tau)+n_1(t+\tau)\Big]\cdot\Big[A_2 y_2(t+\tau)+n_2(t+\tau)\Big]\Big\} \tag{14}$$

Von den 16 Summanden innerhalb der geschweiften Klammer bleiben, wegen Annahme 3, (7), nur vier übrig.

$$R_{n,n}(\tau,\phi) = A_2^2\cdot R_{y_2,y_2}(\tau)\cdot R_{n_1,n_1}(\tau)+A_1^2\cdot R_{y_1,y_1}(\tau)\cdot R_{n_2,n_2}(\tau)+R_{n_1,n_1}(\tau)\cdot R_{n_2,n_2}(\tau) + R_{n_i,n_i}(\tau,\phi) \tag{15}$$

Es ist wichtig zu verstehen, dass $n(t,\phi)$ in zwei Rauschprozesse mit ganz verschiedenen Ursachen zerfällt. Gleichung (15) zeigt dies. Die ersten drei Summanden beschreiben den Einfluss der additiven Störprozesse. Diese Korrelationsfunktionen verschwinden, wenn $n_1, n_2 \equiv 0$ sind, weiterhin sind sie unabhängig von ϕ. Der Summand $R_{ni,ni}(\tau,\phi)$

$$R_{n_i,n_i}(\tau,\phi) \triangleq (A_1\cdot A_2)^2 E\Big[y_1(t)\cdot y_2(t)\cdot y_1(t+\tau)\cdot y_2(t+\tau)\Big] - E^2(z) \tag{16}$$

verursacht das Eigenrauschen ni(t) (Intrinsic-Noise), das auch bei Wegfall aller additiven Störungen, immer vorhanden ist. Die Funktion $R_{ni,ni}(\tau,\phi)$ ist nicht nur von τ, sondern auch von ϕ abhängig. Bei wichtigen Anwendungen - z.B. v-Messung - ist der "Intrinsic-Noise" dominierend und darf keinesfalls vernachlässigt werden. Weiter ist zu bemerken, dass ni(t,ϕ) die untere Genauigkeitsgrenze eines korrelativen Trackingsystems bestimmt.

Zur Berechnung von $R_{ni,ni}(\tau,\phi)$ benötigt man die Kenntnis des Erwartungswertes eines 4-fach Produktes. Dies wiederum erfordert die Kenntnis einer 4-fachen Verbundswahrscheinlichkeit. Im allgemeinen ist diese Funktion unbekannt. Spilker hat das Problem für den Spezialfall binärer, pseudostatistischer Sequenzen gelöst [5]. Für viele praktische Anwendungen ist der Prozess x(t) praktisch gaussverteilt. Da diese Eigenschaft bei linearen Transformationen erhalten bleibt, gilt dies auch für die Signale y_1 und y_2. In diesem Fall gilt [13, S. 43]

$$p(\underline{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{4}}\cdot \det(R_{i,k})^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\Big[\underline{y}-E(\underline{y})\Big]^T\cdot \underline{R}_{i,k}^{-1}\cdot\Big[\underline{y}-E(\underline{y})\Big]\right\} \tag{17}$$

mit

$$\underline{y}^T \triangleq \left[y_1(t), y_2(t), y_1(t+\tau)\, y_2(t+\tau) \right] \text{ , } \underline{y}^T\text{: Transp Vektor}$$

$$\underline{R}_{i,k} = E\left\{ \left[\underline{y} - E(\underline{y}) \right] \cdot \left[\underline{y} - E(\underline{y}) \right]^T \right\} \text{ , Kovarianzmatrix}$$

Den gesuchten Mittelwert erhält man am einfachsten durch Ableiten der charakteristischen Funktion $\Psi(\underline{u})$.

$$\Psi(\underline{u}) \triangleq \exp\left[i \cdot \underline{u}^T \cdot E(\underline{y}) - \frac{1}{2} \underline{u}^T \cdot \underline{R}_{i,k} \cdot \underline{u} \right] \tag{18}$$

Also

$$E\left[y_1(t) \cdot y_2(t) \cdot y_1(t+\tau) \cdot y_2(t+\tau) \right] = \left. \frac{\partial^4 \Psi(\underline{u})}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \partial u_4} \right|_{\substack{u_i = 0 \\ i = 1, \cdots 4}} \tag{19}$$

Nach einigen längeren, aber elementaren Rechnungen findet man

$$\begin{aligned} R_{ni,ni}(\tau, \phi) = &-(A_1 A_2)^2 R_{y_1,y_2}(\tau - \phi) \cdot R_{y_1,y_2}(\tau + \phi) \\ &+ (A_1 A_2)^2 \cdot R_{y_1,y_1}(\tau) \cdot R_{y_2,y_2}(\tau) \end{aligned} \tag{20}$$

Im Gegensatz zum Fremdrauschen

$$\begin{aligned} R_{nn,nn}(\tau) \triangleq\; & A_2^2 R_{y_2,y_2}(\tau) R_{n_1,n_1}(\tau) + A_1^2 R_{y_1,y_1}(\tau) R_{n_2,n_2}(\tau) \\ &+ R_{n_1,n_1}(\tau) \cdot R_{n_2,n_2}(\tau) \end{aligned} \tag{21}$$

ist $R_{ni,ni}(\tau, \phi)$ auch von ϕ abhängig.

Bei symmetrischer Aufteilung der Pole und Nullstellen von $H_1 \cdot \overline{H}_2$ (2,12) lässt sich (20) weiter vereinfachen. Wegen

$$H_1(\omega) = j\cdot\omega\cdot a_0\cdot(-1)^{N-M}\cdot H_2(\omega) \quad . \tag{22}$$

gilt

$$\begin{aligned} S_{y_1,y_2}(\omega) &= j\cdot\omega\cdot a_0(-1)^{N-M}\cdot|H_2(\omega)|^2\cdot S_{x,x}(\omega) \\ S_{y_2,y_1}(\omega) &= \omega^2\cdot a_0^2\cdot|H_2\,\omega)|^2\cdot S_{x,x}(\omega) \end{aligned} \tag{23}$$

Mit Hilfe des Verschiebungssatzes und des Differentiationstheorems der FourierTransformation findet man

$$\begin{aligned} R_{n_i,n_i}(\tau,\phi) = -a_0^2(A_1A_2)^2\cdot\Big[&\frac{d}{d\tau}R_{y_2,y_2}(\tau-\phi)\cdot\frac{d}{d\tau}R_{y_2y_2}(\tau+\phi) \\ &+ R_{y_2y_2}(\tau)\cdot\frac{d^2}{d\tau^2}R_{y_2,y_2}(\tau)\Big] \end{aligned} \tag{24}$$

Für den Regelkreis ist insbesondere das Verhalten des Leistungsdichtespektrums in der Umgebung von $\omega = 0$ interessant, denn dieser Anteil muss durch das Filter $F(\omega)$ möglichst gut entfernt werden. Es ist in der Literatur üblich [14], [15], diesem Wert einen speziellen Namen zu geben. Man definiert als Intensitätskoeffizienten eines Stochastischen Prozesses x

$$K_x \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} R_{x,x}(\tau) = S_{x,x}(0) \tag{25}$$

Mit Hilfe von (24) sind wir in der Lage, folgende wichtige Eigenschaft von $K_{ni}(\phi)$ zu zeigen:

Bei symmetrischer Aufteilung der Pole und Nullstellen von $H_1 \cdot \overline{H}_2$ gemäss (2,12) ist der Intensitätskoeffizient $K_{ni}(\phi)$ für $\phi = 0$ gleich Null

$$K_{ni} = 0 \tag{26}$$

Der Beweis ist einfach. Wir formen den zweiten Summanden von (24) durch partielle Integration um

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_{y_2,y_2}(\tau)\cdot\frac{d^2}{d\tau^2}R_{y_2y_2}(\tau)\,d\tau = R_{y_2,y_2}(\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}R_{y_2,y_2}(\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\tau}R_{y_2,y_2}(\tau)\cdot\frac{d}{d\tau}R_{y_2,y_2}(\tau)\cdot d\tau$$

Der erste Summand auf der rechten Seite verschwindet wegen $R_{y_2,y_2}(\tau = \pm\infty) = 0$. Die Integrale beider Summanden von (24) heben sich also für ein beliebiges $R_{y_2,y_2}(\tau)$ auf.

Die eben bewiesene Eigenschaft ist darum von grosser Wichtigkeit, weil $\phi = 0$ der stabile Arbeitspunkt des Regelkreises ist. Es ist eine sehr erwünschte Eigenschaft, dass in diesem Punkt die Stärke des Rauschens minimal ist. Da nur Filterpaare mit symmetrischer Aufteilung diese Eigenschaft besitzen, bedeutet dies für die praktische Realisierung, dass nur solche Netzwerkpaare in Frage kommen.

Für $|\phi| \to \infty$ strebt (24) asymptotisch gegen

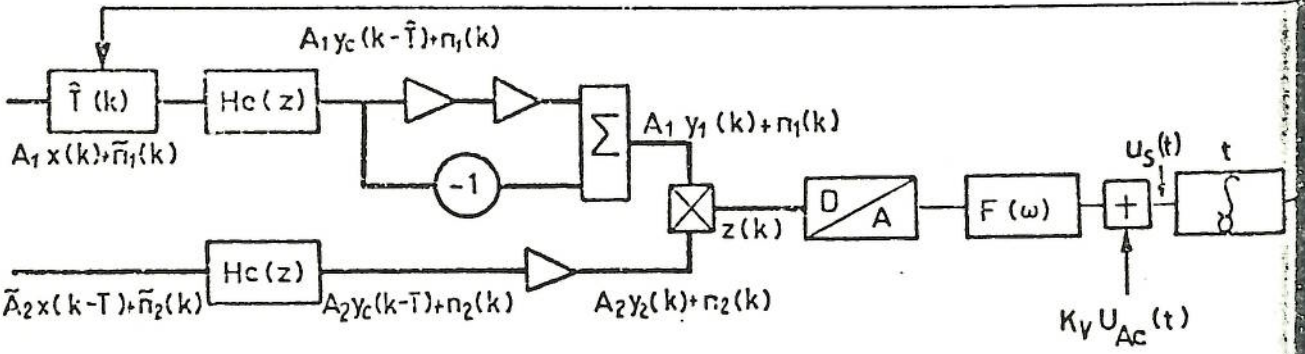
$$R_{n_i,n_i}(\tau, |\phi| \to \infty) = -(a_0)^2 (A_1 A_2)^2 R_{y_2,y_2}(\tau) \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} R_{y_2,y_2}(\tau) \qquad (27)$$

und somit der Intensitätskoeffizient gegen eine Konstante

$$K_{n_i}(|\phi| \to \infty) = \text{konst.} \qquad (27a)$$

3.4. BESCHREIBUNG DES PRODUKTEPROZESSES Z FUER ABGETASTETE SIGNALE

Da die grundsätzlichen Ueberlegungen und die Annahmen die gleichen sind wie im vorigen Abschnitt 3.3., können wir uns kürzer fassen. Insbesondere gilt auch hier $K_{n_i}(0) = 0$ nur bei symmetrischer Aufteilung der Pole und Nullstellen des Produktes $H_1(z) \cdot H_2(1/z)$. Für diesen Fall gilt das in Fig. (3 - 4) gezeichnete Blockschaltbild.



—— Digitaler Signalpfad

Fig. 3-4. Digitaler DLL bei symmetrischer Aufteilung von $H_1(z) \cdot H_2(z)$

Um unnötige Schreibarbeit zu sparen, haben wir den Faktor K_p von (2,52) in A_2 absorbiert. Für die beiden Kanäle gelten die Differenzengleichungen

$$\left.\begin{aligned} A_1 \cdot y_1(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} A_1 \cdot h_c(i) \cdot \left[x(k-2-i-\hat{T}) - x(k-i-\hat{T}) \right] \\ n_1(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_c(i) \cdot \left[\tilde{n}_1(k-2-i-\hat{T}) - \tilde{n}_1(k-i-\hat{T}) \right] \end{aligned}\right\} \text{Kanal 1}$$

$$\left.\begin{aligned} A_2 \cdot y_2(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{A}_2 \cdot h_c(i) \cdot x(k-1-T) \\ n_2(k) &= \sum_{i=0}^{\infty} h_c(i) \cdot \tilde{n}_2(k-1-T) \end{aligned}\right\} \text{Kanal 2} \qquad (28)$$

Der Mittelwert E(z) ist dann

$$\begin{aligned} E(z) &= E\left\{ \left[-A_1 \cdot y_c(k-\hat{T}) + A_1 y_c(k-2-\hat{T}) \right] \cdot A_2 \cdot y_c(k-1-T) \right\} \\ &= A_1 \cdot A_2 \left[-R_{y_c,y_c}(\Phi+1) + R_{y_c,y_c}(\Phi-1) \right] \end{aligned} \qquad (29)$$

E(z) schreiben wir, wie im zeitkontinuierlichen Fall, als Produkt einer auf 1 normierten Funktion $g(\Phi)$ mit einem Proportionalitätsfaktor A

$$A \cdot g(\Phi) \triangleq A_1 \cdot A_2 \cdot R_{y_1,y_2}(\Phi) = E(z) \qquad (30)$$

Leistungsdichtespektrum und Intensitätskoeffizient

Wie im kontinuierlichen Fall setzt sich der Rauschprozess n aus Eigenrauschen n_i und Fremdrauschen n_n zusammen. Analog zu (15) gilt

$$R_{n,n}(m,\Phi) = R_{n_i,n_i}(m,\Phi) + R_{n_n,n_n}(m) \qquad (31)$$

Bei symmetrischer Zerlegung von $H_1(z) \cdot H_2(1/z)$ erhält man für $R_{n_n,n_n}(m)$

$$\begin{aligned} R_{n_n,n_n}(m) = {} & \left[A_2^2 \cdot R_{y_c,y_c}(m) + R_{n_2,n_2}(m) \right] \cdot \left[2 R_{n_1,n_1}(m) - R_{n_1,n_1}(m+2) - R_{n_1,n_1}(m-2) \right] \\ & + A_1^2 \cdot R_{n_1,n_1}(m) \left[2 R_{y_c,y_c}(m) - R_{y_c,y_c}(m+2) - R_{y_c,y_c}(m-2) \right] \end{aligned} \qquad (32)$$

Zur Berechnung von Rni,ni(m,ϕ) machen wir wieder die Annahme, dass y_c gaussverteilt sei. Die Berechnung verläuft dann genau gleich wie in Abschnitt 3.3 und liefert das Resultat

$$R_{n_i,n_i}(m,\phi) = (A_1 A_2)^2 \left[R_{y_c,y_c}(m+1-\phi) - R_{y_c,y_c}(m-1-\phi)\right]\left[R_{y_c,y_c}(m-1+\phi) - R_{y_c,y_c}(m+1+\phi)\right]$$
$$+(A_1 A_2)^2 \left[-R_{y_c,y_c}(m-2) + 2R_{y_c,y_c}(m) - R_{y_c,y_c}(m+2)\right] R_{y_c,y_c}(m) \qquad (33)$$

Es ist interessant, dieses Resultat mit dem entsprechenden in Abschnitt 3.3 zu vergleichen. Wir ersetzen in (24) die Differentialquotienten durch ihre Differenzenquotienten

$$\frac{d}{d\tau} R_{y_c,y_c}(\tau \pm \phi) \cong \frac{R_{y_c,y_c}(m+1 \pm \phi) - R_{y_c,y_c}(m-1 \pm \phi)}{2 \cdot 1/f_p} \quad ; \quad \tau = m \cdot 1/f_p$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} R_{y_c,y_c}(\tau) \cong \frac{R_{y_c,y_c}(m+2) - R_{y_c,y_c}(m) - R_{y_c,y_c}(m) + R_{y_c,y_c}(m-2)}{(2 \cdot 1/f_p)^2} \qquad (34)$$
$$= \frac{-2R_{y_c,y_c}(m) + R_{y_c,y_c}(m+2) + R_{y_c,y_c}(m-2)}{(2 \cdot 1/f_p)^2}$$

Setzt man diese Ausdrücke in (24) ein, so erhält man, bis auf einen konstanten Faktor, die zeitdiskrete Lösung (33). Leistungsdichtespektrum und Korrelationsfunktion des abgetasteten Signals sind durch die Relation

$$S_{n,n}\left[z = \exp(i\omega 1/f_p), \phi\right] = \frac{1}{1/f_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{n,n}(m,\phi) \exp\left[i \cdot \omega 1/f_p \cdot m\right] \qquad (35)$$

verknüpft. Es verbleibt noch zu zeigen, dass Sni,ni $[\exp(i\omega 1/fp), \phi]$ für $\phi = 0$ an der Stelle

$$z = 1 \Leftrightarrow \omega = 2\pi \, 1/f_p \cdot m \quad ; \quad m = 0; \pm 1 \cdots \qquad (36)$$

verschwindet. Definitionsgemäss ist

$$S_{n_i,n_i}(z=1, \phi=0) = \frac{1}{1/f_p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{n_i,n_i}(m, \phi=0) \qquad (37)$$

Setzt man (33) in (37) ein, so erhält man nach einiger Umgruppierung der Summanden

$$\frac{1}{f_p}\cdot\frac{1}{(A_1A_2)^2}\,S_{n_i,n_i}(z=1,\Phi=0)=2\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m+1)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m-1)$$
$$+2\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m+1)\,R_{y_c,y_c}(m-1)-\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m)\cdot R_{y_c,y_c}(m-2) \qquad (38)$$
$$-\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{y_c,y_c}(m)\cdot R_{y_c,y_c}(m-2)$$

Durch Substitution der Variabeln $(m+1)\rightarrow n$ und $(m_2-1)\rightarrow n'$ kann man den zweiten und dritten Summanden von (38) auf die $\sum R^2_{yc,yc}(n)$ bringen. Mit der gleichen Methode transformiert man die zwei letzten Summanden auf die Form $\sum R(n-1)\cdot R(n+1)$. Damit verschwindet $S_{ni,ni}(z=1,\Phi=0)$, wie behauptet.

Das Leistungsdichtespektrum $S_{n,n}(\omega,\Phi)$ am Ausgang des D/A-Wandlers findet man leicht durch Multiplikation von $S_{n,n}(z,\Phi)$ mit der Uebertragungsfunktion $|H_{D/A}(\omega)|^2$

$$S_{n,n}(\omega,\Phi)=|H_{D/A}(\omega)|^2\cdot S_{n,n}[z=\exp(i\omega\cdot 1/f_p),\Phi] \qquad (39)$$

Der Intensitätskoeffizient Kn ist dann wieder

$$K_n(\Phi)=S_{n,n}(\omega=0,\Phi) \qquad (39a)$$

Beispiel 1

Ein Halteglied nullter Ordnung hat die Uebertragungsfunktion

$$|H_{D/A}(\omega)|^2=\left(\frac{1}{f_p}\right)^2\left(\frac{\sin(\omega\cdot 1/2f_p)}{\omega\cdot 1/2f_p}\right)^2 \qquad (40)$$

Für $\omega=0$ findet man dann

$$S_{n,n}(\omega=0,\Phi)=\frac{1}{f_p}\sum_{m=-\infty}^{\infty}R_{n,n}(m,\Phi) \qquad (40a)$$

Beispiel 2

Die Korrelationsfunktion Ryc,yc(∅) sei dreieckförmig (Fig. 3 - 5a). Die resultierende, ungerade Korrelationsfunktion ist in (Fig. 3 - 5b) dargestellt.

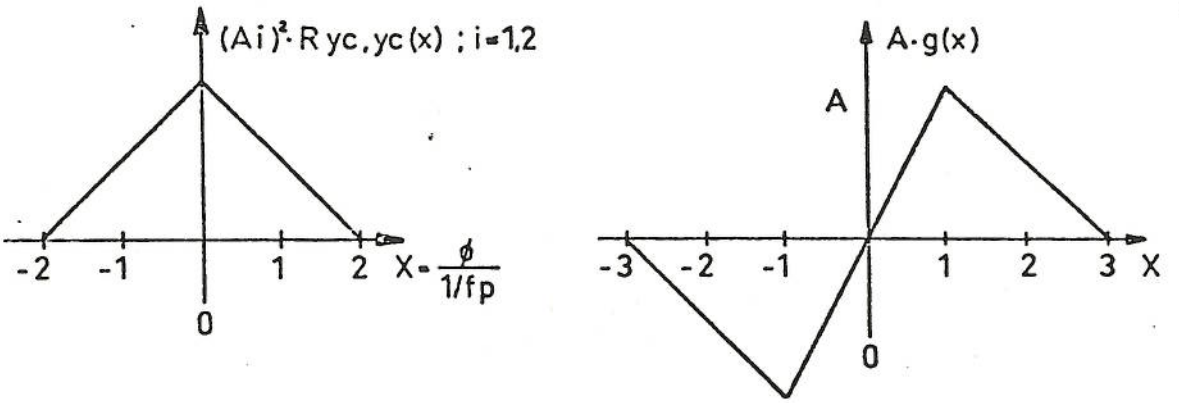


Fig. 3-5a und 3-5b. Korrelationsfunktion und Nichtlinearität

Das Leistungsdichtespektrum Sni,ni [exp(i·ω·1/fp),x] für verschiedene x und der Intensitätskoeffizient $K_{ni}(x)$ sind in den beiden nächsten Figuren dargestellt.

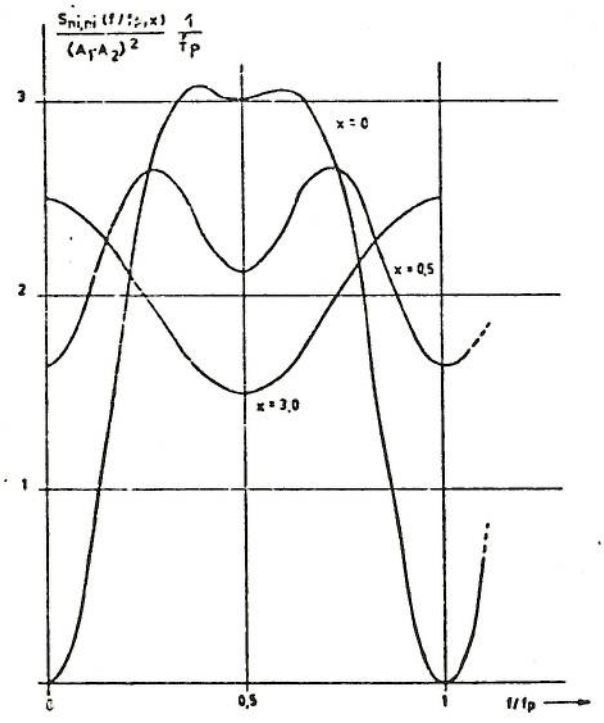


Fig. 3-6. Normiertes Leistungsdichtespektrum

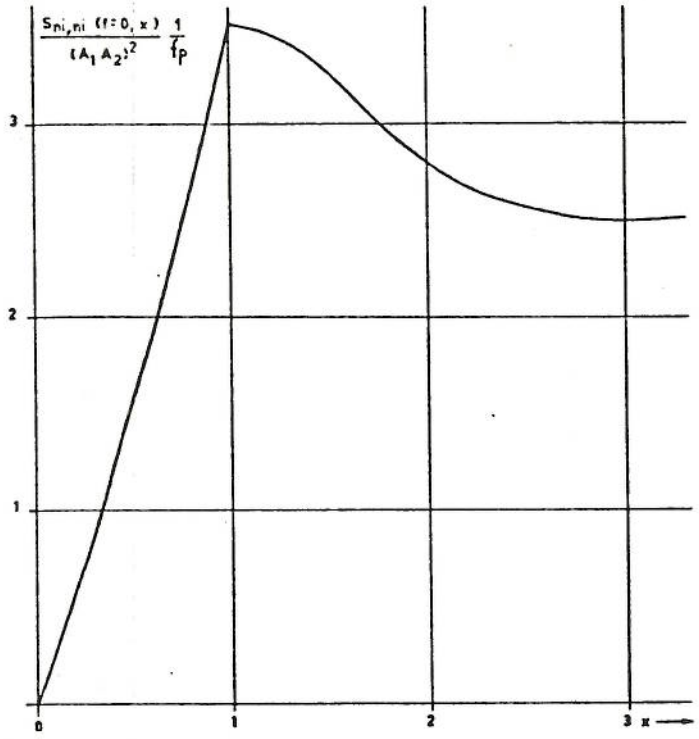


Fig. 3-7. Intensitätskoeffizient $K_{ni}(x)$

3.5. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG DES REGELKREISES

Wir gehen vom Steuergesetz der variablen Verzögerungsleitung aus

$$\frac{d\hat{T}(t)}{dt} = K \cdot u_s(t) \tag{41}$$

mit (Fig. 3 - 1 oder 3 - 2)

* $$u_s(t) = F(p) \cdot z(t) + u_{Ac}(t) \tag{42}$$

---

* Um die folgenden Differentialgleichungen in kompakter Form schreiben zu können, führen wir den Heavisideoperator $p \triangleq d/dt$ ein. Ist allgemein $x(t)$ die Eingangsgrösse eines linearen Netzwerks, dann schreiben wir für den Ausgang $y(t) = F(p) \cdot x(t)$. Mit $p^k = d^k/dt^k$ kann man schreiben $F(p) = \sum a_k (d^k/dt^k) / \sum b_k (d^k/dt^k)$. Für die Laplacetransformierte gilt dann $F(s) = F(p)|_{p=s}$ und für die Fouriertransformierte $F(\omega) = F(p)|_{p = i\omega}$. Damit können Aenderungen der Notation vermieden werden.

Den Prozess z zerlegen wir wie in den Abschnitten 3.3, 3.4 in langsam veränderlichen Mittelwert und mittelwertsfreien Rauschprozess (Gleichung 11, 12, 30).

$$z(t) = A \cdot g[\Phi(t)] + n(t, \Phi) \tag{43}$$

Ersetzen wir $u_s(t)$ durch (42),(43) dann gehorcht $\hat{T}$ der Gleichung

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = K F(p) \cdot [A \cdot g(\Phi) + n(t, \Phi)] + K_v U_{Ac} \tag{44}$$

Ersetzt man $\hat{T}$ durch

$$\hat{T} = T - \Phi \tag{45}$$

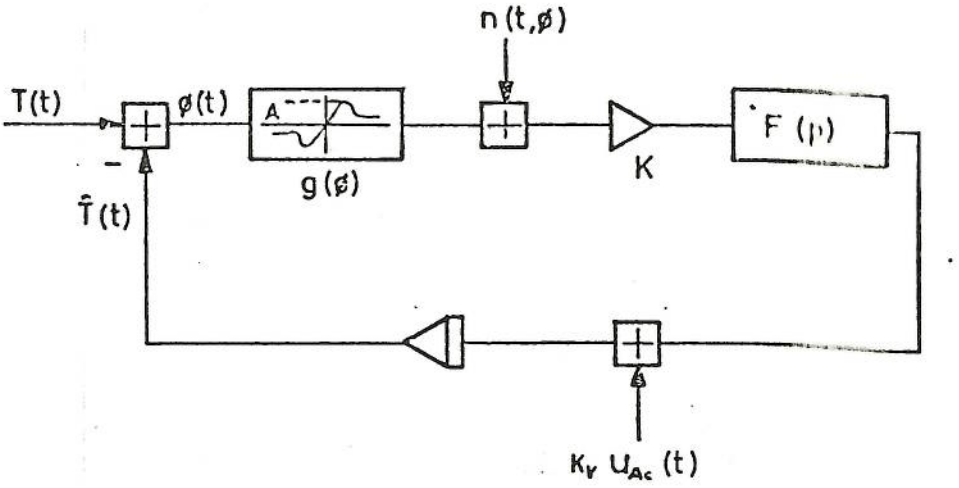
so erhalten wir schlussendlich die gesuchte Differentialgleichung für den Fehler Φ.

$$\frac{d\Phi}{dt} = -K \cdot F(p) \cdot [A \cdot g(\Phi) + n(t, \Phi)] - K_v U_{Ac} + \frac{dT}{dt} \tag{46}$$

In dieser Differentialgleichung tritt T(t) als Störfunktion auf. T(t) kann ein deterministisch bestimmter Bewegungsablauf oder ein Zufallsprozess mit bekannten Eingenschaften sein. Wir wollen festhalten, dass (46)

1. nichtlinear ist, wegen $g(\Phi)$
2. eine regellose Störung $n(t,\Phi)$ enthält.

Damit wird $\Phi(t)$ selber ein Zufallsprozess. Selbst wenn $n(t,\Phi)$ Null wäre, was wegen dem Eigenrauschen nie der Fall ist, wäre die Gleichung (46) wegen der Nichtlinearität nur in Ausnahmefällen geschlossen lösbar. Wegen der Störung durch den Rauschprozess $n(t,\Phi)$ ist es prinzipiell unmöglich, eine Lösung in der Form $\Phi(t)$ anzugeben. Wir werden später zeigen, dass man eine zu Gleichung (46) korrespondierende, partielle Differentialgleichung für die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\Phi,t)$ herleiten kann. Das mathematisch äquivalente Modell, definiert durch (46), ist in Fig. 3 - 8 dargestellt.



K : Verstärkungsfaktor

T : Laufzeit

$\hat{T}$: elektronische Verzögerung, Schätzwert von T

ϕ : Fehler, $\phi = T - \hat{T}$

A^2: Nutzsignalleistung

$n(t,\phi)$: Rauschprozess, von ϕ abhängig

$g(\phi)$: Nichtlinearität, auf 1 normiert

Fig. 3-8. Aequivalentes Modell des DLL

Für den PLL findet man [15, S. 79] die Differentialgleichung

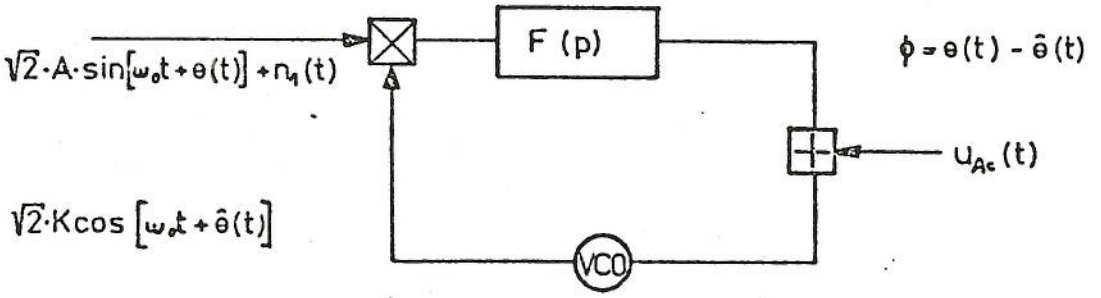
$$\frac{d\Phi}{dt} = -K\,F(p)\cdot\left[A\cdot g(\Phi) + n(t)\right] - K_V \cdot u_{Ac} + \frac{d\Phi}{dt} \qquad (47)$$

Formal finden wir für beide Systeme die gleichen Differentialgleichungen. Im Unterschied zum DLL ist die Nichtlinearität $g(\Phi)$ periodisch und $n(t)$ unabhängig von Φ. Wegen der Periodizität der Nichtlinearität $g(\Phi)$ kann der PLL nicht ausser Tritt fallen, da er nach Durchlaufen einer Phasendifferenz von $\pm 2\pi$ wieder einen stabilen Arbeitspunkt findet.

Beide Kreise benützen die gleiche mathematische Eigenschaft, nämlich die Orthogonalität. Beim PLL nützt man die Orthogonalität zweier periodischer Funktionen mit endlichem Orthogonalitätsintervall aus. Beim DLL sind die beiden Zufallsvariabeln $y_1(t)$ und $y_2(t)$ zu jedem Zeitpunkt orthogonal, falls $\phi = 0$. Vertauscht man den Schar- durch den Zeitmittelwert

$$E[y_1(t) \cdot y_2(t)] = \lim_{Tm \to \infty} \frac{1}{2Tm} \int_{-Tm}^{Tm} y_1(t) \cdot y_2(t)\,dt$$

so kann man sagen, dass das Orthogonalitätsintervall der beiden Funktionen y_1, y_2 unendlich sei.



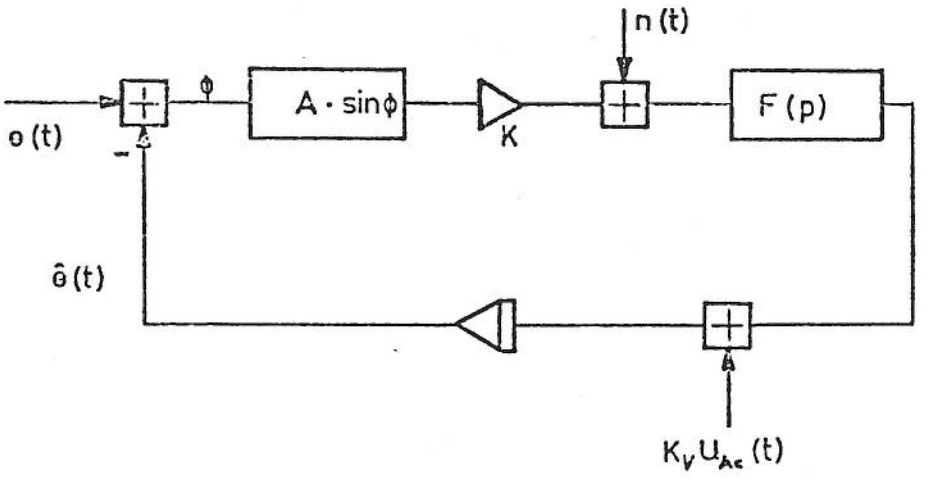


Fig. 3-9. Blockschema und äquivalentes Modell des PLL

4. DIE FOKKER-PLANCK GLEICHUNG

4.1. EINFUEHRUNG

Viele wichtige Systeme der Nachrichten- und Regelungstechnik lassen sich durch eine Gleichung der Form

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = \underline{f}(\underline{x};t) + \underline{B}(\underline{x};t)\cdot\underline{w}(t) \qquad (1)$$

darstellen. In (1) sind $\underline{f}$, $\underline{x}$ * n-dimensionale Kolonnenvektoren, $\underline{w}$ ist ein m-dimensionaler Kolonnenvektor, dessen Komponenten voneinander unabhängige, weisse Rauschprozesse sind, während $\underline{B}$ eine nxm Matrizenfunktion ist. Integriert man beide Seiten von (1) über das Intervall $[t_o, t]$, so erhält man

$$\underline{x}(t) - \underline{x}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\underline{x},v)dv + \int_{t_o}^{t} \underline{B}(\underline{x},v)\cdot\underline{w}(v)\cdot dv \qquad (2)$$

Die beiden Gleichungen sind nur dann äquivalent, falls die Integrale in (2) definiert sind. Diese können für genügend glatte Zufallsfunktionen Riemann Integrale im Mittel sein [13, Theorem 3.7]. Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass die Korrelationsfunktion Riemann integrabel ist; doch dies ist für deltakorrelierte Funktionen gerade nicht der Fall. Wir werden im Abschnitt 4.2. die notwendige Erweiterung des Integralbegriffs (Itô-Integral) einführen. Es ist wohlbekannt [13, S. 84], dass weisses Gauss'sches Rauschen die formelle Ableitung des Wiener Prozesses ist

$$\underline{w}(t) = \frac{d\underline{\beta}(t)}{dt} \qquad (3)$$

Man schreibt (1) daher meistens in der Form

$$d\underline{x} = \underline{f}(\underline{x};t)\cdot dt + \underline{B}(\underline{x};t)\, d\underline{\beta}(t) \qquad (4)$$

---

* Die Vektor Notation ist im Appendix dieses Kapitels erklärt.

Es muss betont werden, dass weisses Gauss'sches Rauschen eine mathematische Fiktion ist. Der Grund für die Einführung von weissem Rauschen ist, dass die Zufallsfunktion $\underline{x}(t)$ in diesem Falle ein Vektor-Markov Prozess ist [13, Theorem 4.5.]. Die Markov Prozesse sind die mathematisch am besten untersuchten stochastischen Prozesse und besitzen einige sehr schöne Eigenschaften. Bekanntlich [13, S. 78] kann man die mehrdimensionale Dichtefunktion eines Markov Prozesses in der Form

$$p\left[\underline{x}(t_1)\,\underline{x}(t_2)\cdots\underline{x}(t_N)\right] = p\left[\underline{x}(t_N)/\underline{x}(t_{N-1})\right]\cdot\ldots p\left[\underline{x}(t_2)/\underline{x}(t_1)\right]\cdot p\left[\underline{x}(t_1)\right] \tag{4}$$

$$t_1 \leq t_2 \leq t_3 \ldots . \leq t_N$$

schreiben. Diese Gleichung drückt die bemerkenswerte Tatsache aus, dass die Kenntnis der bedingten Wahrscheinlichkeit $p[\underline{x}(t_k)/\underline{x}(t_{k-1})]$ und der Grenzverteilung $p[\underline{x}(t_1)]$ zur vollkommenen statistischen Beschreibung von $\underline{x}(t)$ genügt. Wir werden in Abschnitt 4.3. zeigen, dass man $p[\underline{x}(t_k)/\underline{x}(t_{k-1})]$ durch Lösen einer partiellen Differentialgleichung (Fokker-Planck Gleichung) erhält.

Wie schon erwähnt, braucht man zur Definition von (2) das Itô-Integral. Wir werden im nächsten Abschnitt die für diese Arbeit relevanten Sätze erwähnen und mit Hilfe des Itô-Kalküls die F-P Gleichung herleiten. Wir werden dabei sehen, dass die Verwendung des Itô-Kalküls die Analysis oft vereinfacht und auf jeden Fall auf eine sichere mathematische Grundlage stellt. Alle Sätze über den Itô-Kalkül sind dem ausgezeichneten Buch von Jazwinsky [13] entnommen. Die elegante Herleitung der F-P Gleichung mittels Itô-Differential wurde von Lindsey [15, Kap. 8] gegeben.

4.2. EINIGE SAETZE DES ITÔ-KALKUELS

Itô-Integral

Definition [13, S. 98]

Sei $I = [a,b]$ und sei $\beta(t)$ ein skalarer Wiener Prozess mit Varianzparameter σ^2. Die zufällige Funktion $G(t)$ sei auf I definiert. Man unterteilt I

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

Für $G(t)$ gelte (Stufen-Funktion)

$$G(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ G_i, \text{ konst}, & t_i \leq t < t_{i+1} \quad ; E[G_i^2] < \infty \\ 0, & t \geq t_n \end{cases}$$

Dabei sei G_i unabhängig von $\beta(t_k) - \beta(t_e)$ für $t_i \leq t_l \leq t_k \leq b$. Dann ist das Itô-Integral definiert durch

$$\int_I G(\nu)\, d\beta(\nu) \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} G_i \left[\beta(t_{i+1}) - \beta(t_i)\right] \tag{5}$$

Ist $G(t)^n$ eine Folge von Stufen-Funktionen die gegen $G(t)$ im Sinne von

$$\int_I E\left\{\left[G(t) - G(t)^n\right]^2\right\} dt \to 0 \quad ; \quad n \to \infty$$

konvergieren, dann gilt für alle solchen Funktionen

$$\int_I G(\nu)\, d\beta(\nu) = \underset{n\to\infty}{L.i.m.} \int_I G^n(\nu)\, d\beta(\nu) \quad * \tag{6}$$

Für das Itô-Integral gelten die beiden folgenden Theoreme

Theorem 4.1. [13, S. 99]

Die zufälligen Funktionen $G(t)$ und $F(t)$ sollen die Bedingungen erfüllen

- $G(t)$, $F(t)$ unabhängig von $\beta(t_k) - \beta(t_e)$ für $t \leq t_l \leq t_k \leq b$
- $E\left[G(t)^2\right]$, $E\left[F(t)^2\right] < \infty$

Denn sind ihre Itô-Integrale definiert und es gilt

$$E\left[\int_I G(\nu)\, d\beta(\nu)\right] = 0 \tag{7}$$

$$E\left[\int_I G(\nu)\, d\beta(\nu) \cdot \int_I F(\nu)\, d\beta(\nu)\right] = \sigma^2 \int_I E\left[G(\nu)\, F(\nu)\right] d\nu \tag{8}$$

---

* Die Folge x_n konvergiert im Mittel gegen x falls gilt

$$\lim_{n\to\infty} E\left[(x - x_n)^2\right] = 0$$

Man schreibt dafür

$$L.i.m.\ x_n = x$$

Theorem 4.4. [13, S. 102]

Sei $E[G(t)^2] < \infty$ für alle $t \in I$ und sei $G(t)$ stetig im Mittel und erfülle die Unabhängigkeitsbedingung von Theorem 4.1. Dann gilt

$$\int_I G(v)\,(d\beta(v))^2 = \sigma^2 \underbrace{\int_I G(v)\,dv}_{\text{Riemann Integral}} \qquad (9)$$

Stochastische Differentialgleichungen

Nachdem das Itô-Integral definiert ist, können wir (4) einen Sinn geben. Da die Integrale (2) die Differentiale (4) definieren, ist (4) nichts anderes als eine abgekürzte Schreibweise für die Integralgleichung

$$\underline{x}(t) - \underline{x}(t_o) = \int_{t_o}^{t} \underline{f}(\underline{x};v)\,dv + \int_{t_o}^{t} \underline{B}(\underline{x};v)\,d\underline{\beta}(v) \qquad (10)$$

Jazwinsky zeigt in Theorem 4.5. [13, S. 105] dass (10) unter sehr allgemeinen Bedingungen eine eindeutige Lösung (im Mittel) hat. Der Prozess $\underline{x}(t)$ ist ein Markov Prozess und durch die Abfangsbedingung $\underline{x}(t_o)$ eindeutig bestimmt. Das ist ein sehr bemerkenswertes Ergebnis, da der Zustandsvektor $\underline{x}$ eines Systems mit weissem Rauschen als Störgrösse ein Vektor-Markov Prozess ist.

Das Itô-Differential

Bei der Analyse stochastischer Systeme ist die Differentialregel des Itô-Kalküls eines der wichtigsten Instrumente.

Theorem 4.2. [13, S. 112]

Sei $\underline{x}(t)$ die eindeutige Lösung der stochastischen Differentialgleichung

$$d\underline{x} = \underline{f}(\underline{x};t)\,dt + \underline{B}(\underline{x};t)\,d\underline{\beta}(t) \qquad (11)$$

Dabei sind $\underline{x}, \underline{f}$ n-dimensionale Kolonnenvektoren, $d\beta(t)$ ein m-dimensionaler Kolonnenvektor dessen Komponenten voneinander unabhängige weisse, Gauss'sche Rauschprozesse sind mit

$$E\left[d\beta(t)\,d\beta^T(t)\right] = Q(t)\,dt \qquad (12)$$

Sei $\varphi(\underline{x},t)$ eine skalare Funktion, stetig nach t und zweimal stetig nach den Elementen von $\underline{x}$ differenzierbar. Dann gilt für das (stochastische) Differential

$$d\varphi(x;t) = \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial t}\cdot dt + \sum_k \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x_k}\cdot f_k(\underline{x};t)\cdot dt$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,\delta}\sum \left[\underline{B}(\underline{x};t)\cdot Q(t)\cdot \underline{B}^T(\underline{x};t)\right]_{k,\delta}\cdot \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x_k\cdot\partial x_\delta}\cdot dt \qquad (13)$$

$$+\sum_k\sum_\delta \frac{\partial\varphi(x;t)}{\partial x_k}\cdot B(\underline{x};t)_{k,\delta}\cdot d\underline{\beta}(t)$$

Gleichung (13) sagt aus, welcher Differentialgleichung eine Funktion der Lösung einer andern Differentialgleichung gehorcht. Man kann die Regel formal durch eine Taylor Reihenentwicklung herleiten, wobei man – im Gegensatz zu gewöhnlichen Funktionen – auch Terme zweiter Ordnung in $d\beta(t)$ berücksichtigen muss.

Beispiel 1 [13, Example 4.5.]

Um zu zeigen, dass beim Itô-Kalkül die Regeln der gewöhnlichen Infinitesimalrechnung nicht gelten, studieren wir folgenden Spezialfall.

$\underline{x}$: skalare Grösse

$\underline{f} = 0 \quad ; \quad \underline{G} = 1$

d.h. wir haben

$$dx(t) = d\beta(t)$$
$$E\left[d\beta^2(t)\right] = \sigma^2\cdot dt$$

Die Funktion φ hänge nicht explizit von t ab. In diesem Falle erhalten wir für das stochastische Differential (10)

$$d\varphi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot d\beta(t) \qquad (14)$$

Wir setzen für $\varphi(x)=x^2=\beta^2$ und integrieren (14) beidseitig

$$\beta^2(t)-\beta^2(t_0)=\sigma^2\int_{t_0}^{t}dv+2\cdot\int_{t_0}^{t}\beta(v)\,d\beta(v)\,.$$

oder umgeordnet

$$\int_{t_0}^{t}\beta(v)\cdot d\beta(v)=\frac{1}{2}\left[\beta^2(t)-\beta^2(t_0)\right]-\frac{1}{2}\cdot\sigma^2\cdot(t-t_0)$$

Der zweite Summand würde bei der gewöhnlichen Integration herausfallen.

4.3. HERLEITUNG DER FOKKER-PLANCK GLEICHUNG MIT HILFE DES ITÔ-DIFFERENTIALS [15, S. 353]

Wir wählen

$$\varphi(\underline{x};t)=\exp\left[i\cdot\underline{u}^{T}\cdot(\underline{x}(t)-\underline{x}(t_0))\right] \tag{15}$$

und führen die abgekürzte Schreibweise

$$\underline{M}(\underline{x};t)\triangleq\underline{B}(\underline{x};t)\cdot\underline{Q}(t)\cdot\underline{B}^{T}(\underline{x};t)$$

ein. Dann kann man für (13) schreiben

$$d\varphi(\underline{x};t)=\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[i\cdot u_k\cdot f_k(\underline{x};t)-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}M_{kj}(\underline{x};t)\cdot u_k\cdot u_j\right]\cdot\varphi(\underline{x};t)\cdot dt\right\}$$
$$+\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}i\cdot u_k\cdot B_{kj}(\underline{x};t)\cdot\varphi(\underline{x};t)\,d\beta_j(t) \tag{16}$$

Wir integrieren (16) beidseitig und bilden den bedingten Mittelwert bezüglich $\underline{x}(t_c)$

$$E\left[\varphi(\underline{x};t)/\underline{x}(t_o)\right] = 1 + \int_{t_o}^{t} E\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\,\cdot\,\right]\cdot\varphi(\underline{x};\nu)/\underline{x}(t_o)\right\}d\nu \qquad (17)$$

Der zweite Summand in (16) verschwindet wegen Theorem 4.1. Der Term in der eckigen Klammer ist derselbe wie in (16). Bekanntlich ist die bedingte charakteristische Funktion $\Psi(\underline{u}/\underline{x}(t_o)$ definiert als

$$\Psi\left[\underline{u}/\underline{x}(t_o)\right] \triangleq E\left\{\exp\left[i\cdot\underline{u}^T\cdot\underline{x}\right]/\underline{x}(t_o)\right\} \qquad (18)$$

Differenziert man (17) partiell nach t, so findet man unter Verwendung von (18)

$$\frac{\partial\Psi\left[\underline{u}/\underline{x}(t_o)\right]}{\partial t} = E\left\{\sum_{k=0}^{n}\left[\,\cdot\,\right]\cdot\exp\left[i\cdot\underline{u}^T\underline{x}(t)/\underline{x}(t_o)\right]\right\} \qquad (19)$$

Nun ist aber die bedingte charakteristische Funktion Ψ nichts anderes als die Fouriertransformierte der bedingten Dichtefunktion $p\left[\underline{x}(t)/\underline{x}(t_o)\right]$! Durch Rücktransformation von (19) findet man nach einiger Rechnung die F-P Gleichung. *

$$\frac{\partial p(\underline{x},t)}{\partial t} = -\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_k}\left[f_k(\underline{x};t) - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[M_{k,j}(\underline{x};t)\right]\right]\cdot p(\underline{x};t)\right\} \qquad (20)$$

Die Funktionen

$$K_k(\underline{x};t) \triangleq f_k(\underline{x};t)$$
$$K_{k,j}(\underline{x};t) \triangleq \left[\underline{B}(\underline{x};t)\cdot\underline{Q}(t)\cdot\underline{B}^T(\underline{x};t)\right]_{k,j} \qquad (21)$$

---

* Im Sinne einer prägnanten Notation unterdrücken wir in Zukunft die Abhängigkeit von $\underline{x}_o$ und schreiben

$$p\left[\underline{x};t/\underline{x}(t_o\right] \rightarrow p(\underline{x};t)$$

werden als Intensitätskoeffizienten bezeichnet. Aus später ersichtlichen Gründen nennt man

$$J_k(\underline{x};t) \triangleq \left[f_k(\underline{x};t) - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[M_{kj}(\underline{x};t) \right] \right] \cdot p(\underline{x};t) \qquad (22)$$

die k-te Komponente des Wahrscheinlichkeitsdichtestromes (probability-density current). Die Koeffizienten der partiellen Differentialgleichung lassen sich mit Hilfe von (21) sofort aus der korrespondierenden stochastischen Differentialgleichung bestimmen.

Eine eingehende Diskussion der F-P Gleichung kann man z.B. in [15] finden.

4.4. RAND- UND ANFANGSBEDINGUNGEN

Um Lösungen der Fokker-Planck-Gleichung zu erhalten müssen Rand- und Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Die Anfangsbedingung ist gegeben durch die Verteilung $p(\underline{x},t)$ zur Zeit $t = 0$. Die $2\cdot(n+1)$ notwendigen Randbedingungen ergeben sich aus der spezifischen Problemstellung. Es ist interessant festzustellen, dass viele rein mathematische Probleme im Zusammenhang mit der F-P-Differentialgleichung noch ungelöst sind. Insbesondere kann die Frage, welche Randbedingungen für (20) überhaupt zugelassen sind erst für die eindimensionale Gleichung in voller Allgemeinheit beantwortet werden [16, S. 138]. Zur mathematischen Theorie siehe auch [17, 18]

4.5. PHYSIKALISCHE INTERPRETATION DER F-P-GLEICHUNG

Bevor wir mit der Lösung der F-P-Gleichung beginnen, wollen wir eine anschauliche Interpretation der physikalischen Aussage dieser partiellen Differentialgleichung erarbeiten. Ein solches Verständnis ist zur Lösung unserer Probleme von grossem Nutzen, da wir, im Gegensatz zur reinen Mathematik, nicht an der F-P-Gleichung an sich interessiert sind, sondern Aussagen über die durch sie beschriebenen Vorgänge machen wollen.

Nehmen wir an, unser System befinde sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand $\underline{x}_o = \underline{x}(t_o)$. Für Zeiten $t > t_o$ beschreibt die Trajektorie $\underline{x}(t)$ eine komplizierte Bahn im(n+1)-dimensionalen Raum, ganz ähnlich einem Teilchen, das einer Brown'schen Bewegung unterworfen wird. Stellen wir uns nun eine sehr grosse Zahl solcher Teilchen vor, so haben wir eine Art Gas vor uns, das sich nach allen Richtungen des Raumes ausbreitet und dessen Dichte proportional der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(\underline{x},t)$ ist. Wir sprechen in diesem Modell daher von der "Anzahl Moleküle" statt von der "Grösse der Wahrscheinlichkeit", und wir verstehen unter

$$\int_{Vol} p(\underline{x};t) \cdot dVol$$

die Anzahl Molekühle im betrachteten Volumen oder den Bruchteil der Zeit den ein Molekül in diesem Volumen verbringt. Natürlich verstehen wir unter "Anzahl Moleküle" die relative, nicht die absolute Zahl von Teilchen, denn diese Bruchteile entsprechen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

Wenn wir versuchen diese Modell quantitativ zu beschreiben, so müssen wir offensichtlich mathematisch erfassen, dass die Moleküle nicht verschwinden, sondern sich nur verschieben können (Erhaltungssatz). Der Erhaltung der Moleküle entspricht dann die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, d.h. das Integral der Dichtefunktion $p(\underline{x},t)$ muss zu jedem Zeitpunkt 1 ergeben (sicheres Ereignis). Tatsächlich hat die F-P-Gleichung die aus andern Gebieten der Physik bekannte Gestalt der Kontinuitätsgleichung. Mit Hilfe von (22) lässt sich (20) in der Form

$$\frac{\partial p(\underline{x};t)}{\partial t} + \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left[J_k(\underline{x};t)\right] = 0 \qquad (23)$$

schreiben. Bedenkt man, dass der zweite Summand von (23) als Divergenz des Vektorfeldes $\underline{J}(\underline{x},t)$ geschrieben werden kann, so wird aus (23)

$$\frac{\partial p(\underline{x};t)}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{J}(\underline{x};t) = 0 \qquad (24)$$

Jede Komponente der Stromdichte $J_k(\underline{x},t)$ setzt sich aus zwei Teilen zusammen

$$J_k(\underline{x};t) = J_{S,k}(\underline{x};t) + J_{D,k}(\underline{x};t)$$

(Drift, Diffusion)

(26)

$$J_{S,k}(\underline{x};t) \triangleq f_k(\underline{x};t)\cdot p(\underline{x};t)$$

$$J_{D,k}(\underline{x};t) \triangleq -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[M_{k,j}(\underline{x};\tau)\cdot p(\underline{x};\tau)\right]$$

Die erste Komponente beschreibt die Drift des Teilchens (verursacht durch das Signal in einem Tracking-System), während die zweite Komponente die Diffusion (verursacht durch das Fremd- und Eigenrauschen) beschreibt.

APPENDIX: VEKTOR- UND MATRIXNOTATION

Unterstrichene Grössen sind Vektoren oder Matrizen.

$\underline{x}$	Zustandsvektor
x_i	i-te Komponente von $\underline{x}$
$B_{k,i}$	Das Elemente (k,i) der Matrix $\underline{B}$
I	Einheitsmatrix
$\underline{0}$	Null-Vektor
Ω	(n + 1) dimensionaler Merkmalsraum

5. ERNEUERUNGSPROZESSE, STATIONAERE DICHTEFUNKTION UND MITTLERE LEBENSDAUER VON TRAJEKTORIEN

5.1. PROBLEMSTELLUNG

Der Aufbau der stationären Dichtefunktion $p(\underline{y})$, für die definitionsgemäss gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} p(\underline{y};t) = 0 \qquad (1)$$

ist qualitativ in der nächsten Figur gezeichnet. Dabei ist insbesondere das Verhalten der Randverteilung $p(\phi;t)$ von Interesse.

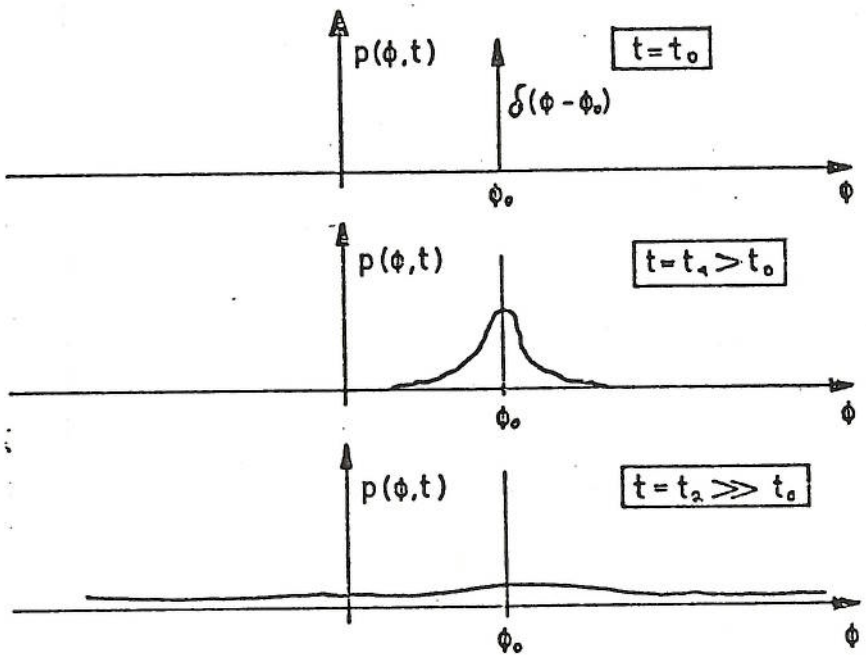


Fig. 5-1. Entstehung der stationären Verteilung im Laufe der Zeit

Im Laufe der Zeit verteilt sich die anfänglich schmale Dichtefunktion $p(\phi;t)$ über einen weiteren Bereich. Das dauert solange, bis im stationären Zustand die Dichtefunktion verschwindet.

$$p(\phi) \triangleq \lim_{t\to\infty} p(\phi;t) = 0 \quad ; \text{aber} \int_{-\infty}^{\infty} p(\phi)\,d\phi = 1 \qquad (2)$$

Dies bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen in irgendeinem Intervall der ϕ-Achse zu finden, überall gleich gross ist. Daher besitzt $p(\phi)$ eine unendlich grosse Streuung. Man könnte sich prinzipiell auch

vorstellen, dass $p(\phi;t)$ asymptotisch gegen eine Grenzverteilung $p(\phi)$ mit endlicher Streuung strebte. Die Frage des asymptotischen Verhaltens ist eng mit den Intensitätskoeffizienten K_i, $K_{i,k}$ Gl. (4,21) verknüpft. Wir werden in Kap. 6 zeigen, dass alle physikalisch realisierbaren Trackingsysteme das zuerst beschriebene Verhalten zeigen, d. h. für $t \to \infty$, $p(\phi;t)=0$. Dies hängt damit zusammen, dass die Driftkraft in (4,26) für wachsendes ϕ gegen Null strebt, während die Diffusionskomponente von (4,26) gegen eine Konstante strebt, so dass die Teilchen im Verlauf einer unendlich langen Zeit über den ganzen Raum verteilt werden. Der Zerfall der Dichtefunktion $p(\phi;t)$ kann dabei so langsam geschehen, dass sich quasistationäre Zustände ausbilden, die von einem Experimentator praktisch nicht von echt stationären Zuständen unterschieden werden können (Abschn. 6.5).

Auch beim PLL existiert keine stationäre Lösung. Im Verlauf der Zeit diffundiert die ursprüngliche Verteilung in die Umgebung von ϕ_o. Früher oder später wird der Phasenfehler so gross, dass der Regelkreis eine Phasendifferenz von $\pm 2\pi$ durchläuft (cycle slipping) und beim nächsten stabilen Arbeitspunkt $\phi = \phi_o \pm 2\pi$ wieder einrastet.

Genau wie beim DLL verteilt sich die Wahrscheinlichkeit nach unendlich langer Zeit über das ganze Intervall.

$$\lim_{t \to \infty} p(\phi;t) = 0 \tag{3}$$

Da das stationäre Verhalten der Regelkreise aber von grösster praktischer Bedeutung ist, muss ein äquivalenter Prozess gesucht werden, der die statistischen Eigenschaften des ursprünglichen Prozesses beibehält und im stationären Falle eine sinnvolle Lösung ergibt. Für den PLL wurde das durch die sog. "Periodic Extension" erreicht. (Man vergleiche aber auch Kap. 9). Wegen der Periodizität der Nichtlinearität kann man eine stationäre Lösung konstruieren, indem man alle um die stabilen Gleichgewichtspunkte $\phi_o = 2\pi n$, $n = 0 \pm 1, \ldots$ herumliegenden Intervalle $[2\pi \cdot n - \pi;\ 2\pi \cdot n + \pi]$ in das Grundintervall $[\pi-, +\pi]$ abbildet. Ausdruck dieser Reduktion mod. 2π sind die Randbedingungen

$$p(-\pi;t) = p(\pi;t) \tag{4}$$

Diese Konstruktion einer stationären Lösung wurde im Falle einer dreieckförmigen Nichtlinearität [19] auch auf den DLL übertragen, indem man die Nichtlinearität einfach periodisch fortsetzte. Ein solches Vorgehen ist aber rein formal und dem zu lösenden Problem nicht angepasst.

Wir werden in diesem Kapitel eine neue Methode zur Konstruktion einer stationären Dichtefunktion entwickeln. Die Methode lässt sich sowohl auf Regelkreise mit periodischer (PLL) wie auch auf solche mit aperiodischer Nichtlinearität anwenden und liefert die Lösung zu einigen bis anhin

ungelösten Problemen. Vorgängig müssen wir uns einige Fakten über das Verhalten der Regelkreise in Erinnerung rufen. Zu Beginn jeder Messung muss der DLL durch einen Suchvorgang (Acquisition) in den "In-Lock"-Bereich gebracht werden. In der Praxis "wobbelt" man die elektronische Verzögerung $\hat{T}$ über den vermuteten Wertebereich von T. Sofern die Wobbelgeschwindigkeit nicht zu gross ist, wird der DLL beim Durchlaufen von $\phi = T - \hat{T} = 0$ einhängen, was durch eine vom DLL unabhängige Ueberwachungsschaltung signalisiert wird. * Wird während dem anschliessenden "Tracking" eine der Grenzen $\phi = \phi_{min}, \phi_{max}$ überschritten, spricht die Ueberwachungsschaltung an, und es wird ein neuer Suchvorgang initialisiert.

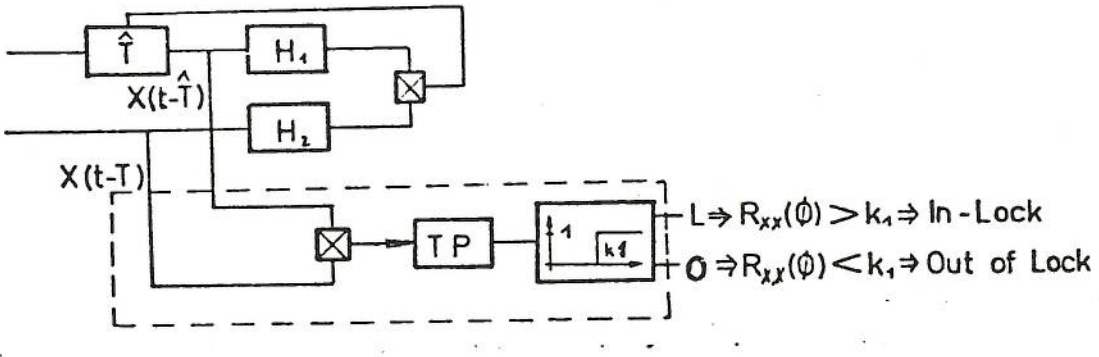


Fig. 5-2. Ueberwachungsschaltung

Dieses Verhalten können wir folgendermassen beschreiben:
Zur Zeit $t = t_o$ wird in der Ebene $\phi = \phi_o$ des (n + 1)-dimensionalen Raumes ein Zufallsprozess gestartet. Die übrigen Komponenten $\underline{y}_o^T \triangleq (y_1, y_2, .. y_n)$ des Prozesses besitzen für diesen Zeitpunkt die Anfangsverteilung

$$q\,(\underline{y}_o ; t=t_o / \phi=\phi_o ; t=t_o) \qquad (5)$$

Zu jedem Zeitpunkt besteht eine von ϕ abhängige Wahrscheinlichkeit $S(\phi)$, dass der Prozess in seinem momentanen Standort gestoppt wird. Unmittelbar danach wird ein neuer Prozess mit den gleichen Anfangsbedingungen wie zur Zeit $t = t_o$ gestartet etc. Es gilt somit für den k-ten Teilprozess (Fig. 5 - 3).

---

* Diese Ueberwachungsschaltung misst die gerade Korrelationsfunktion $R_{xx}(\phi)$, die bei $\phi = 0$ ihr Maximum hat. Sobald der Wert $R_{xx}(\phi)$ unter eine gewisse Grenze sinkt, signalisiert die Schaltung "Out of Lock". Dabei muss beachtet werden, dass die Ueberwachungsschaltung nur im Mittel bei $\phi = \phi_{min}, \phi_{max}$ anspricht, dass aber für jeden andern Wert von ϕ eine Wahrscheinlichkeit ungleich Null besteht, dass die Schaltung fehl anspricht

$$q\left[\Phi ; t=\sum_{1}^{k-1} \tau_{L,i}\right]=\delta(\Phi-\Phi_0) \qquad k=2, \cdots \infty$$

$$q\left[\underline{y}_0 ; t=\sum_{1}^{k-1} \tau_{L,i} \,/\, \Phi=\Phi_0 ; t=\sum_{1}^{k-1} \tau_{L,i}\right] \qquad (6)$$

$\tau_{L,i}$: Lebensdauer des i-ten Teilprozesses

$\sum_{i=1}^{k-1} \tau_{L,i}$: Startpunkt des k-ten Teilprozesses , $k \geq 2$

Dabei haben wir angenommen, dass die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ viel grösser sei als die zur Akquisition benötigte Zeit. (Aus diesem Grunde darf man auch annehmen, dass der Prozess immer genau an die Stelle $\Phi = \Phi_0$ zurückspringt.) Weiter machen wir die Annahme, dass die Trajektorien an den Rändern eines beliebigen, aber endlichen Intervalls $[\Phi_{min}, \Phi_{max}]$ mit Sicherheit gestoppt werden, sobald sie eine dieser Grenzen zum ersten Mal berühren.

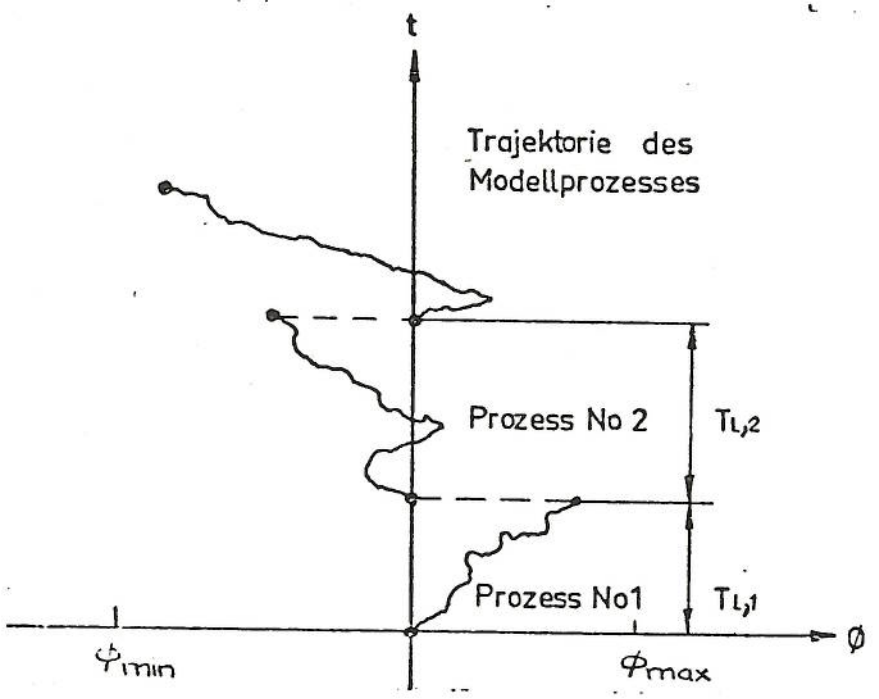


Fig. 5-3. Projektion der $\underline{y}(t)$ Trajektorie auf die (Φ,t)-Ebene

Die Vorgänge beim PLL sind ganz analog. Fig. 5-4 zeigt den Prozess $\Phi(t)$ wenn Φ nur Werte zwischen $[-\pi,\pi]$ annehmen kann, d.h. wenn wir den Phasenfehler mod.2π reduzieren. Fig. 5-4 entspricht dem Oszillogramm eines Phasenmeters.

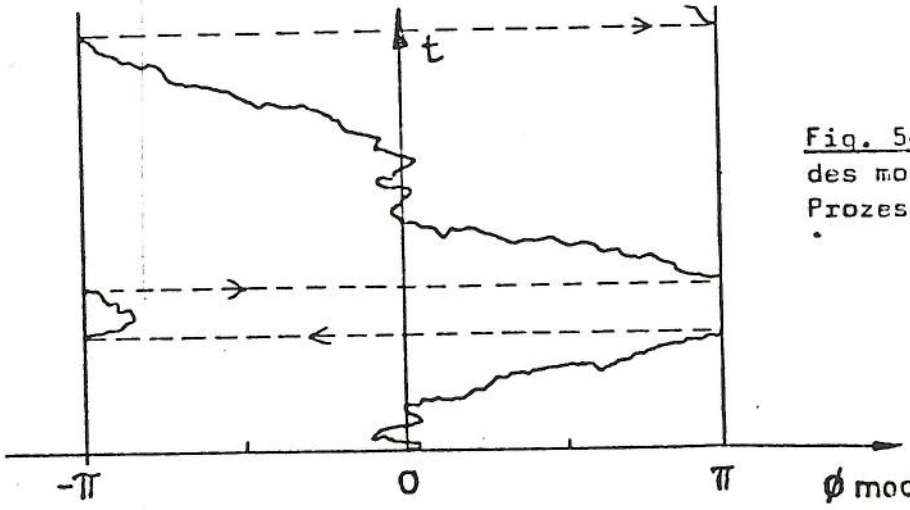


Fig. 5-4. Trajektorie des mod. 2π reduzierten Prozesses $\phi(t)$

Jedesmal, wenn der Prozess $\underline{y}(t)$ eine der beiden Ebenen $\phi = \pm\pi$ berührt, springt die Trajektorie um $\pm 2\pi$ nach rechts oder links. Die analytische Behandlung eines solchen Prozesses würde grosse Schwierigkeiten bereiten, da die Trajektorien sowohl nach links als auch nach rechts springen. Abgesehen davon entspricht die Zahl der Phasensprünge um $\pm 2\pi$ nicht der Anzahl der 'cycle- slips' ,da jedes Ueberschreiten der Ebene $\phi = \pm\pi$ einen Phasensprung bewirkt ohne dass die stabile Gleichgewichtslage bei $\phi = \phi_0$ notwendigerweise erreicht wird.

Zum Ziel führt hingegen folgende Ueberlegung: Zur Zeit t=0 wird in der Ebene $\phi = \phi_0$ des (n+1)-dimensionalen Raumes ein Zufallsprozess gestartet. Die übrigen Komponenten $\underline{y}_0$ des Prozesses besitzen die Anfangsverteilung

$$q(\underline{y}_0 ; t=0 \,/\, \phi=\phi_0 ; t=0) \qquad (7)$$

Sobald die Trajektorie zum ersten Mal eine der beiden Ebenen $\phi = \phi_0 \pm 2\pi$ berührt, wird sie gestoppt. Unmittelbar danach wird ein neuer Prozess mit den gleichen Anfangsbedingungen gestartet.

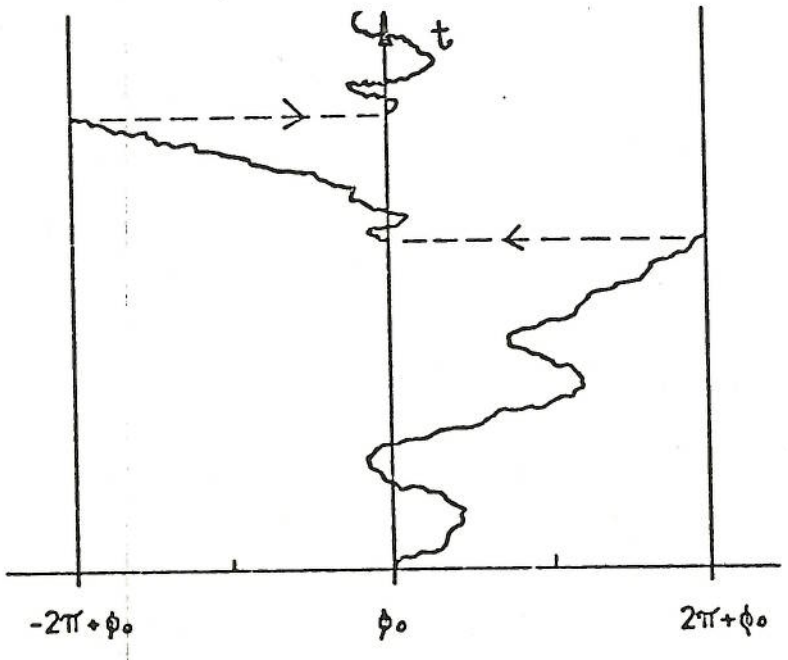


Fig. 5-5. Trajektorie des im Intervall $[\phi_0 - 2\pi ; \phi_0 + 2\pi]$ definierten Prozesses

Mit dieser Konstruktion haben wir die Trajektorien in rechts- und linksdrehende aufgeteilt. Dies entspricht der Aufteilung in positive ($+2\pi$) oder negative (-2π) Phasensprünge. Für jeden Phasensprung um $\pm 2\pi$ muss die entsprechende Trajektorie eine volle 2π Phasenveränderung erlitten haben, sodass die Anzahl der "cycle-slips" mit derjenigen der Phasensprünge im Modell nunmehr exakt übereinstimmt. Wegen der Periodizität des PLL sind die Punkte ϕ_o und $\phi_o \pm 2\pi$ identisch, sodass der neue Prozess tatsächlich unmittelbar nach der Auslöschung seines Vorgängers beginnt und genau nach ϕ_o zurückspringt. Bemerkenswert ist, dass der PLL als Spezialfall des Regelkreises mit aperiodischer Nichtlinearität aufgefasst werden kann.

5.2. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN EINZEL- UND ERNEUERUNGSPROZESS

Die den Erneuerungsprozess definierenden Vektor-Markovprozesse

- seien zeitlich homogen, d.h. $q(\underline{y};t+t_1/\underline{y}=\underline{y}_1;t=t_1)=q(\underline{y};t/\underline{y}=\underline{y}_1;t=0)$
- besässen di gleiche Anfangsverteilung (Gl. 6)

$$q\left[\phi;t=\sum_{n=1}^{i-1}\tau_{i,n}\right]=\delta(\phi-\phi_o) \quad ; \; i\geq 2$$

$$q\left[\underline{y}_o;t=\sum_{n=1}^{i-1}\tau_{i,n}/\;\phi=\phi_o\;;\;t=\sum_{n=1}^{i-1}\tau_{i,n}\right] \qquad (8)$$

$$(\tau_{i,0}=0)$$

Wir definieren für die Trajektorie des i-ten Teilprozesses die Ereignisse:

α_i: Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses befindet sich zur Zeit t in $[\phi,\phi+d\phi;\underline{y}_o,\underline{y}_o+d\underline{y}_o]$

β_i: Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses wurde im Intervall $[\tau,\tau+d\tau]$ gestartet, $\tau\in[0,\infty]$ (9)

γ_i: Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses wird zur Zeit t <u>im Innern</u> von $[\phi_{min},\phi_{max}]$ gestoppt.

$\overline{\gamma_i}$: Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses wird zur Zeit t <u>im Innern</u> von $[\phi_{min},\phi_{max}]$ nicht gestoppt.

Die drei Ereignisse können zu zusammengesetzten oder bedingten Ereignissen kombiniert werden. So ist

$\alpha_i\cdot\beta_i$ Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses befindet sich zur Zeit t in $[\phi,\phi+d\phi;\underline{y}_o,\underline{y}_o+d\underline{y}_o]$ <u>und</u> wurde im Intervall $[\tau,\tau+d\tau]$ gestartet.

$\alpha_i\cdot\overline{\gamma_i}$ Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses befindet sich zur Zeit t in $[\phi,\phi+d\phi;\underline{y}_o,\underline{y}_o+d\underline{y}_o]$ <u>und</u> wird nicht gestoppt. ($\phi\in(\phi_{min},\phi_{max})$)

α_i/β_i Die Trajektorie des i-ten Teilprozesses ist zur Zeit t in $[\phi,\phi+d\phi;\underline{y}_o,\underline{y}_o+d\underline{y}_o]$ unter der <u>Bedingung</u>, dass sie in $[\tau,\tau+d\tau]$ gestartet wurde.

$\overline{\gamma_i}/\alpha_i$ Die Trajektorie wird zur Zeit t nicht gestoppt unter der <u>Bedingung</u>, dass sie sich im Intervall $[\phi,\phi+d\phi;\underline{y}_o,\underline{y}_o+d\underline{y}_o]$ befindet. ($\phi\in(\phi_{min},\phi_{max})$)

Wir ordnen den Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zu.

$$\underline{P}(\alpha_i/\beta_i) = \begin{cases} q(\Phi, \underline{y}_0; t-\tau)\,dV & ; t \geq \tau \\ 0 \text{ sonst} & \end{cases} \qquad ; dV \triangleq d\phi\, dy_1 \cdot dy_2 \cdots dy_n$$

$$* \quad \underline{P}(\overline{\gamma_i}/\alpha_i) = S(\phi) \qquad (11)$$

$$\underline{P}(\beta_i) = f_i(\tau)\cdot d\tau$$

Die Definitionen (11) gelten für genügend kleine dV und $d\tau$. Für die Wahrscheinlichkeit $P(\alpha_i/\beta_i)$ haben wir die Voraussetzung der zeitlichen Homogenität benützt. Nach der Regel von Bayes gilt

$$\underline{P}(\alpha_i \cdot \beta_i) = \underline{P}(\alpha_i/\beta_i)\cdot \underline{P}(\beta_i)$$
$$= q(\Phi, \underline{y}_0; t-\tau)\, f_i(\tau)\cdot dV\cdot d\tau \qquad (12)$$

Daraus durch Integration

$$\underline{P}(\alpha_i) = dV \cdot \int_0^t q(\Phi, \underline{y}_0; t-\tau)\cdot f_i(\tau)\, d\tau \qquad (13)$$

Analog gilt für das Verbundsereignis

$$\underline{P}(\alpha_i \cdot \overline{\gamma_i}) = \underline{P}(\overline{\gamma_i}/\alpha_i)\cdot \underline{P}(\alpha_i)$$
$$= S(\phi)\cdot dV \cdot \int_0^t q(\Phi, \underline{y}_0; t-\tau)\cdot f_i(\tau)\, d\tau \qquad (14)$$

Genau gleich zeigt man

$$\underline{P}(\alpha_i \cdot \gamma_i) = [1 - S(\phi)]\cdot dV \cdot \int_0^t q(\Phi, \underline{y}; t-\tau)\cdot f_i(\tau)\, d\tau \qquad (15)$$

---

* Wir nehmen an, dass $S(\phi)$ ausserhalb eines beliebigen, aber endlichen Intervalls (ϕ_{min}, ϕ_{max}) verschwindet. Mit WSK 1 existiert keine Trajektorie ausserhalb dieses Intervalls.

Der Merkmalsraum der $\mathfrak{M}_i$ hat nur zwei Punkte, entweder stoppen oder nicht. Deshalb muss gelten

$$P(\alpha_i \cdot \bar{\mathfrak{M}}_i) + P(\alpha_i \cdot \mathfrak{M}) = P(\alpha_i) \qquad (16)$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich irgendeine Trajektorie zur Zeit t im Volumen $[\phi, \phi+d\phi;\ \underline{y}_0, \underline{y}_0 + d\underline{y}_0]$ befindet und zu diesem Zeitpunkt nicht gestoppt wird, ist

$$P\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \bar{\mathfrak{M}}_i\Big] = S(\phi)\cdot dV \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t q(\phi, \underline{y}_0; t-\tau)\cdot f_i(\tau)\, d\tau \qquad (17)$$

Dabei haben wir ausgenützt, dass die Ereignisse $(\alpha_i \cdot \bar{\mathfrak{M}}_i)$ und $(\alpha_m \cdot \bar{\mathfrak{M}}_m)$, $m \neq i$, gegenseitig unvereinbar sind.
Im folgenden schreiben wir

$$p(\phi, \underline{y}_0; t)\cdot dV \triangleq P\Big[\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \bar{\mathfrak{M}}_i\Big] \qquad (18)$$

und erhalten für die Dichtefunktion des Prozesses mit Rücksprung (Erneuerungsprozess)

$$p(\phi, \underline{y}_0; t) = S(\phi)\cdot \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t q(\phi, \underline{y}_0; t-\tau)\cdot f_i(\tau)\, d\tau \qquad (19)$$

Den Startpunkt des i-ten Teilprozesses können wir durch die Lebensdauer der vorangegangenen Teilprozesse ausdrücken.

$$\tau = \tau_{L,1} + \tau_{L,2} + \cdots \tau_{L,i-1} = \sum_{n=1}^{i-1} \tau_{L,n} \qquad (20)$$
$$i \geq 2$$

Für jeden Teilprozess i ist τ die Summe von (i - 1) voneinander unabhängigen Zufallsvariabeln. (Feller nennt Prozesse mit der Eigenschaft (20) "Renewal Processes" [18, S. 181]). Nach einem bekannten Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt dann

$$f_i(\tau) = \underbrace{d_L(\tau_L) * d_L(\tau_L) \ldots * d_L(\tau_L)}_{i-1 \text{ fache Faltung}} \quad ; \; i=2,\cdots\infty \tag{21}$$

$$f_1(\tau) = \delta(\tau)$$

Dabei ist $d_L(\tau_L)$ die Dichtefunktion der Lebensdauer $\tau_{L,i}$ der einzelnen Prozesse. Da alle Prozesse statistisch gleichwertig sind, wurde der Index i weggelassen. Durch Laplacieren von (19) erhält man

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot t} \cdot p(\Phi, \underline{y}_0 ; t)\,dt = \int_0^\infty e^{-st} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t S(\Phi)\, q(\Phi, \underline{y}_0 ; t-\tau) \cdot f_i(\tau)\, d\tau \right] dt \tag{22}$$

Vertauscht man auf der rechten Seite dieser Gleichung erlaubterweise Summation und Integration über t, so liefert der Faltungssatz der Laplace Transformation

$$\int_0^\infty e^{-st} p(\Phi, \underline{y}_0 ; t)\,dt = \sum_{i=1}^{\infty} S(\Phi) \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot q(\Phi, \underline{y}_0 ; t)\,dt \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f_i(t)\,dt \tag{23}$$

Ersetzt man im Integral

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot f_i(t) \cdot dt \tag{24}$$

die Dichtefunktion $f_i(t)$ durch die (i - 1)-fache Faltung (21), so führt die wiederholte Anwendung des Faltungssatzes auf

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot t} \cdot f_i(t)\,dt = \left[\int_0^\infty e^{-s\tau_L} \cdot d_L(\tau_L) \cdot d\tau_L \right]^{i-1} * \tag{25}$$

$$i \geq 2$$

---

* Für i=1 ist $f_1(\tau) = \delta(\tau)$

$$\Rightarrow \int_0^\infty \delta(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau = 1$$

Mit den Definitionen

$$d_L(s) \triangleq \int_0^\infty e^{-s\cdot\tau_L} \cdot d_L(\tau_L) \cdot d\tau_L$$

$$q(\phi, \underline{y}_0; s) \triangleq \int_0^\infty e^{-s\cdot t} \cdot q(\phi, \underline{y}_0; t)\, dt \qquad (26)$$

$$p(\phi, \underline{y}_0; s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot p(\phi, \underline{y}_0; t)\, dt$$

ergibt sich schlussendlich der Zusammenhang zwischen der Dichtefunktion des Einzel- und Erneuerungsprozesses in transformierter Form

$$p(\phi, \underline{y}_0, s) = S(\phi) \cdot q(\phi, \underline{y}_0; s) \left[\sum_{i=2}^{\infty} [d_L(s)]^{i-1} + 1 \right]$$

$$p(\phi, \underline{y}_0; s) = S(\phi) \cdot q(\phi, \underline{y}_0; s) \cdot \frac{1}{[1 - d_L(s)]} \qquad (27)$$

Erinnert man sich an die allgemeine Definition des Erwartungswertes einer Zufallsvariabeln

$$E[m(x)] \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} m(x) \cdot p(x)\, dx$$

dann ist

$$d_L(s) = \int_0^\infty e^{-s\cdot\tau_L} \cdot d_L(\tau_L) \cdot d\tau_L = E(e^{-s\tau_L}) \qquad (28)$$

sodass wir (27) in der endgültigen Form

$$p(\phi, \underline{y}_0; s) = S(\phi) \cdot q(\phi, \underline{y}_0; s) \cdot \frac{1}{1 - E(e^{-s\tau_L})} \qquad (29)$$

schreiben können.

5.3. DIE F - P - GLEICHUNG DES EINZELPROZESSES

Solange die Trajektorie des i-ten Teilprozesses intakt ist, gehorcht die Dichtefunktion $q(\phi, \underline{y}_0, t)$ einer F-P-Gleichung. Da alle Teilprozesse statistisch gleichwertig sind, beschränken wir uns im folgenden auf die zur Zeit $t = 0$ startende Trajektorie, für deren Dichtefunktion die F-P-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} q(\phi, \underline{y}_0; t) + L\, q(\phi, \underline{y}_0; t) = 0$$

mit

$$L \triangleq \sum_{k=0}^{n} \frac{\partial}{\partial y_k} K_k(\underline{y}) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k} K_{kj}(\underline{y}) \qquad (30)$$

$(y_0 = \phi)$

gilt. L ist ein räumlicher Differentialoperator, definiert in Ω, dessen Intensitätskoeffizienten zeitunabhängig sind um Bedingung (8) zu erfüllen. Die Anfangsbedingung ist

$$q(\phi, \underline{y}_0; t=0) = q(\underline{y}_0; t=0 / \phi = \phi_0; t=0) \cdot \delta(\phi - \phi_0) \qquad (31)$$

Die Zufallsvariabeln y_k können alle Werte zwischen $\pm\infty$ annehmen, und die Randbedingungen müssen deshalb bei $y_k = \pm\infty$ spezifiziert werden. Die Tatsache, dass $q(\phi, \underline{y}_0; t)$ eine Dichtefunktion ist, bedingt, dass $q(\phi, \underline{y}_0; t)$ für $|y_k|$ gegen unendlich verschwindet, da sonst die Normalisierungsbedingung nicht erfüllt werden kann. Es wird sich sogar als notwendig erweisen, die stärkere Bedingung

$$K_k(\phi, \underline{y}_0) \cdot q(\phi, \underline{y}_0; t)\Big|_{y_k = \pm\infty} = 0 \qquad (32)$$

$(k = 1, \ldots n)$

einzuführen. Für die Ableitungen fordern wir

$$\frac{\partial}{\partial y_k} \left[K_{k,k}(\phi, \underline{y}_0) \cdot q(\phi, \underline{y}_0; t) \right]\Big|_{y_k = \pm\infty} = 0 \qquad (33)$$

$(k = 1, 2 \ldots n)$

Entsprechend der Konstruktion des Prozesses und der Definition von $S(\phi)$ (11) sind die zwei Randbedingungen für ϕ gleich

$$q\,(\phi=\phi_{min}, \underline{y}_0\,;t) = q(\phi=\phi_{max}, \underline{y}_0\,;t) = 0 \qquad (34)$$

Diese Randbedingungen bedeuten physikalisch, dass die Trajektorie spätestens dann gestoppt wird, wenn sie zum ersten Mal eine der beiden Ebenen $\phi = \phi_{min}$, ϕ_{max} berührt (absorbierende Barrieren) [18, chap. X.5]

Durch Laplace-Transformation von (30) erhält man

$$s\cdot q(\phi, \underline{y}_0\,; s) - q(\phi, \underline{y}_0\,; t=0) + L\,q(\phi, \underline{y}_0\,; s) = 0 \qquad (35)$$

Ersetzt man $q(\phi, \underline{y}_0\,; s)$ durch $p(\phi, \underline{y}_0\,; s)$ (siehe Gl. 29), dann erhält man die F-P-Gleichung des Erneuerungsprozesses in transformierter Form

$$L\,\frac{1}{S(\phi)}\cdot p(\phi, \underline{y}_0\,; s) = -s\cdot\frac{1}{S(\phi)}\cdot p(\phi, \underline{y}_0\,; s) + \frac{q(\phi, \underline{y}_0\,; t=0)}{1 - E(e^{-s\tau})} \qquad (36)$$

5.4. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNG FUER DIE STATIONAERE VERTEILUNG DES ERNEUERUNGSPROZESSES

Zur Bestimmung der stationären Verteilung machen wir vom Endwerttheorem Gebrauch

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} [s\cdot F(s)] \qquad (37)$$

Wir wenden diesen Satz auf (36) an, nachdem wir den ersten Summanden der rechten Seite nach links gebracht haben.

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{S(\phi)}\cdot(L+s)\cdot s\cdot p(\phi,\underline{y}_0;s)\right]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{s\cdot q(\phi,\underline{y}_0;t=0)}{1-E(e^{-s\tau_L})}\right] \tag{38}$$

Für kleine s müssen wir in der Reihenentwicklung

$$E(e^{-s\tau_L})=E\left[1-s\cdot\tau_L+\frac{(s\cdot\tau_L)^2}{2!}+\cdots\right] \tag{39}$$

nur die zwei ersten Summanden berücksichtigen

$$\lim_{s\to 0}\left[\frac{s\cdot q(\phi,\underline{y}_0;t=0)}{1-E(e^{-s\tau_L})}\right]=\lim_{s\to 0}\left[\frac{q(\phi,\underline{y}_0;t=0)}{1-1+\frac{s}{s}E(\tau_L)-\cdots}\right]$$

$$=\frac{q(\phi,\underline{y}_0;t=0)}{E(\tau_L)} \tag{40}$$

Definitionsgemäss ist

$$E(\tau_L)\triangleq\int_0^\infty \tau_L\cdot d_L(\tau_L)\cdot d\tau_L \tag{41}$$

die mittlere Lebensdauer des Einzelprozesses. Vollzieht man den Grenzübergang auch auf der linken Seite von (38), so erhält man für die stationäre Verteilung des Erneuerungsprozesses

$$L\,\frac{1}{S(\phi)}\,p(\phi,\underline{y}_0;t=\infty)=\frac{q(\phi,\underline{y}_0;t=0)}{E(\tau_L)} \tag{42}$$

Zur Bestimmung der Randbedingungen für $p(\phi,\underline{y}_0;t)$ aus denjenigen des Einzelprozesses $q(\phi,\underline{y}_0;t)$ nützen wir die Tatsache aus, dass diese zeitunabhängig sind. Wir wählen willkürlich $t=0$. Mit Hilfe von (29) und dem Anfangswertheorem der Laplace Transformation finden wir die Relation

$$p(\phi,\underline{y}_0;t)\Big|_{\substack{\text{Rand von}\\ \Omega}}=S(\phi)\cdot q(\phi,\underline{y}_0;t)\Big|_{\text{Rand von }\Omega}\quad;\ t\in[0,\infty] \tag{43}$$

Nach (42) kann die Funktion $S(\phi)$ immer im Differenzialoperator absorbiert werden

$$L\frac{1}{S(\phi)} \Rightarrow L^*$$

Dies bedeutet, dass man jeden Erneuerungsprozess auf den Fall zurückführen kann, wo für $S(\phi)$ gilt

$$S(\phi) = \begin{cases} 1 & \phi_{min} < \phi < \phi_{max} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Man beachte, dass in (42) die gesuchte Dichtefunktion durch Lösen einer inhomogenen, linearen, partiellen Differentialgleichung gefunden werden muss. Dies bedeutet, dass keine frei wählbare Normalisierungskonstante zur Erfüllung der Bedingung

$$\int_\Omega p(\phi, \underline{y}_0 ; t=\infty)\, dV = 1$$

eingeführt werden kann. Es bleibt deshalb noch zu zeigen, dass $p(\phi, \underline{y}_0 ; t = \infty)$ tatsächlich eine Dichtefunktion ist, die (43) erfüllt. Bevor wir den Beweis führen können, müssen wir im nächsten Abschnitt 5.5. einige Vorarbeit leisten.

5.5. DIE MITTLERE LEBENSZEIT EINER TRAJEKTORIE

Wir wollen in diesem Abschnitt die Aufgabe lösen, die mittlere Lebensdauer einer Trajektorie zu berechnen. Das Problem ist eng verwandt, aber nicht identisch, mit dem in der Literatur beschriebenen "Mean time to first passage" Problem [14], [15], [16] [18].

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich der zur Zeit t = 0 gestartete Teilprozess zur Zeit t im Volumenelement $[\phi, \phi+d\phi; \underline{y}_0 ; \underline{y}_0 + d\underline{y}_0]$ befindet (und nicht gestoppt wird) ist (14)

$$P(\alpha_1 \cdot \tilde{\tau}_1) = S(\phi)\cdot dV \cdot \int_0^t q(\phi\, \underline{y}_0 ; t-\tau)\cdot f(\tau)\cdot d\tau$$

$$= S(\phi)\cdot q(\phi, \underline{y}_0 ; t)\cdot dV \qquad (44)$$

Integriert man Gl. (44) über das Volumen Ω, indem die Trajektorie existieren kann, so erhält man die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess zur Zeit t nicht gestoppt wird

$$W(t) = \int_{\Omega} S(\phi) \cdot q(\phi, \underline{y}_0 \,; t)\, dV \tag{45}$$

Für t = 0 ist

$$q(\phi, \underline{y}_0 \,; t=0) = q(\underline{y}_0 \,; t=0 / \phi = \phi_0 \,; t=0) \cdot \delta(\phi - \phi_0) \tag{46}$$

und daher

$$W(0) = S(\phi_0)$$

Man beachte, dass $W(t) \leq 1$ für $t > 0$ und deshalb $q(\phi, \underline{y}_0 \,; t)$ keine Dichtefunktion im engeren Sinne ist. [15, chap. 7] Die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess im Zeitintervall [0, t] gestoppt wurde ist

$$1 - W(t)$$

Daraus lässt sich die Dichtefunktion w(t) durch Differenzierung berechnen

$$w(t) \triangleq \frac{d}{dt}\left[1 - W(t)\right] = -\frac{dW(t)}{dt} \tag{47}$$

In Worten

$w(t) \cdot \Delta t$: Wahrscheinlichkeit, dass die Trajektorie im Zeitintervall $[t, t + \Delta t]$ gestoppt wurde.

Die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ für eine Trajektorie ist dann definitionsgemäss

$$E(\tau_L) = \int_0^{\infty} t\, w(t)\, dt = \int_0^{\infty} t \left(-\frac{dW(t)}{dt}\right) dt \tag{48}$$

Durch partielle Integration gewinnen wir

$$\int_0^t t\left(-\frac{dW(t)}{dt}\right)dt = -W(t)\cdot t\Big|_0^\infty + \int_0^\infty W(t)dt \quad . \tag{49}$$

Unter der Annahme, dass $W(t)\cdot t \to 0$ für $t\to\infty$ gilt

$$E(\tau_L) = \int_0^\infty W(t)dt \tag{50}$$

Ersetzt man $W(t)$ durch die rechte Seite von Gl. (45), so kann man die mittlere Lebensdauer einer Trajektorie durch Lösen des Doppelintegrals

$$E(\tau_L) = \int_0^\infty\int_\Omega S(\phi)\cdot q(\phi,\underline{y}_0;t)\,dV\,dt \tag{51}$$

erhalten. Aus einem später ersichtlichen Grund, führen wir die neue Funktion $Q(\phi,\underline{y}_0)$ ein

$$Q(\phi,\underline{y}_0) \triangleq \int_0^\infty q(\phi,\underline{y}_0;t)dt \tag{52}$$

Damit wird aus (51)

$$E(\tau_L) = \int_\Omega S(\phi)\cdot Q(\phi,\underline{y}_0)\,dV \tag{53}$$

Solange die Trajektorie nicht gestoppt wird, gehorcht ihre Dichtefunktion $q(\phi,\underline{y}_0;t)$ der F-P-Gleichung

$$\frac{\partial q(\phi,\underline{y}_0;t)}{\partial t} + L\,q(\phi,\underline{y}_0;t) = 0 \tag{54}$$

mit den Randbedingungen (32, 33, 34). Durch beidseitige Integration von (54) über $[0,\infty]$ erhält man mit Hilfe von (52)

$$q(\phi,\underline{y}_0;t=\infty)-q(\phi,\underline{y}_0;t=0) = -L\,Q(\phi,\underline{y}_0;t) \qquad (55)$$

Da früher oder später alle Trajektorien eine der beiden Ebenen $\phi = \phi_{min}$, ϕ_{max} erreichen (sofern sie nicht vorher gestoppt wurden), verschwindet der erste Summand von (55) definitionsgemäss, und es bleibt

$$L\,Q(\phi,\underline{y}_0) = q(\phi,\underline{y}_0;t=0) \qquad (56)$$

Die Randbedingungen für $Q(\phi,\underline{y}_0)$ sind dieselben wie für $q(\phi,\underline{y}_0;t)$. Wir finden somit $E(\tau_L)$ durch Lösen einer inhomogenen, partiellen Differentialgleichung in den Ortsvariabeln. Man beachte die Aehnlichkeit von (56) und (42)!

5.6. BEWEIS, DASS DIE DICHTEFUNKTION $p(\phi,\underline{y}_0;t=\infty)$ AUF 1 NORMIERT IST

Beweis:

Wir definieren

$$Q^*(\phi,\underline{y}_0) \triangleq S(\phi)\cdot Q(\phi,\underline{y}_0) \qquad (57)$$

und erhalten statt (53) und (56)

$$E(\tau_L) = \int_{\Omega} Q^*(\phi,\underline{y}_0)\,dV \qquad (58)$$

$$L\,\frac{1}{S(\phi)}\,Q^*(\phi,\underline{y}_0) = q(\phi,\underline{y}_0;t=0) \qquad (58a)$$

Die Randbedingungen für Q^* sind die gleichen wie für Q, resp. q.

$$K_k(\phi, \underline{y}_0) \cdot Q^*(\phi, \underline{y}_0)\Big|_{|y_k|=\infty} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\left[K_{kk}(\phi, \underline{y}_0) \cdot Q^*(\phi, \underline{y}_0)\right]\Big|_{|y_k|\to\infty} = 0 \qquad (59)$$

$$Q^*(\phi, \underline{y}_0)\Big|_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} = 0$$

Für den Erneuerungsprozess erhielten wir (42)

$$L\,\frac{1}{S(\phi)}\,p(\phi, \underline{y}_0; t=\infty) = \frac{q(\phi, \underline{y}_0; t=0)}{E(\tau_L)} \qquad (60)$$

Die Randbedingungen sind die gleichen wie für $Q^*(\phi, \underline{y}_0; t)$.

Wir vergleichen (58a) und (60). Die beiden Gleichungen sind gleich - bis auf den Faktor $1/E(\tau_L)$ - und gehorchen den gleichen Randbedingungen. da aber (58)

$$\int_{\Omega} Q^*(\phi, \underline{y}_0)\,dV = E(\tau_L)$$

ist, so muss

$$\int_{\Omega} p(\phi, \underline{y}_0; t=\infty)\,dV = 1$$

sein.

6. ANALYSE DES DLL ERSTER ORDNUNG

6.1. EINFUEHRUNG

Man bezeichnet in der Literatur einen Regelkreis dessen Filter F(p) (n-1)-Pole hat als ein Trackingsystem n-ter Ordnung.In der Praxis werden meistens Systeme erster Ordnung (F(p)=1) verwendet. Systeme höherer Ordnung werden- wo notwendig - durch Kopplung von Kreisen erster Ornung realisiert. Es ist deshalb angebracht den DLL erster Ordnung im Detail zu analysieren.Wir beschränken uns darauf das Trackingverhalten zu studieren.Das Problem des Auffindens des 'Lock-Bereiches' wird in Kap.8 besprochen.

6.2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DES DLL ERSTER ORDNUNG MIT dT/dt=KONSTANT

Die Differentialgleichung ist ein Spezialfall der allgemeinen Gl.(3,46) mit

$$F(p) = 1 \quad ; \quad \frac{dT}{dt} = a \quad ; \quad \mu_{Ac} = 0 \tag{1}$$

und lautet

$$\frac{d\phi}{dt} = -K\cdot\left[A\cdot g(\phi) + n(t,\phi)\right] + a \tag{2}$$

Der Fall wo T selbst eine langsam veränderliche Zufallsfunktion ist,führt zu einem Vektor-Markov Prozess $\underline{y}(\phi,\underline{y}_o;t)$.Der Vektor $\underline{y}_o$ beschreibt das Verhalten von T(t). [15,chap.12] ,[26,chap. 4.7]. Das Problem wird in Kap.7 in einem allgemeineren Zusammenhang behandelt werden,sodass wir uns auf den Fall dT/dt=a beschränken können.

Für eine stabile Gleichgewichtslage ist notwendig,dass $d\phi/dt$ im Mittel verschwindet.

$$E\left[\dot{\phi}/\phi=\phi_L\right] = -K\cdot A\cdot g(\phi_L) + a = 0 \tag{3}$$

Die grafischen Lösungen dieser Gl. sind in Fig. 6-1 mit P_L ,resp.P_S

bezeichnet.

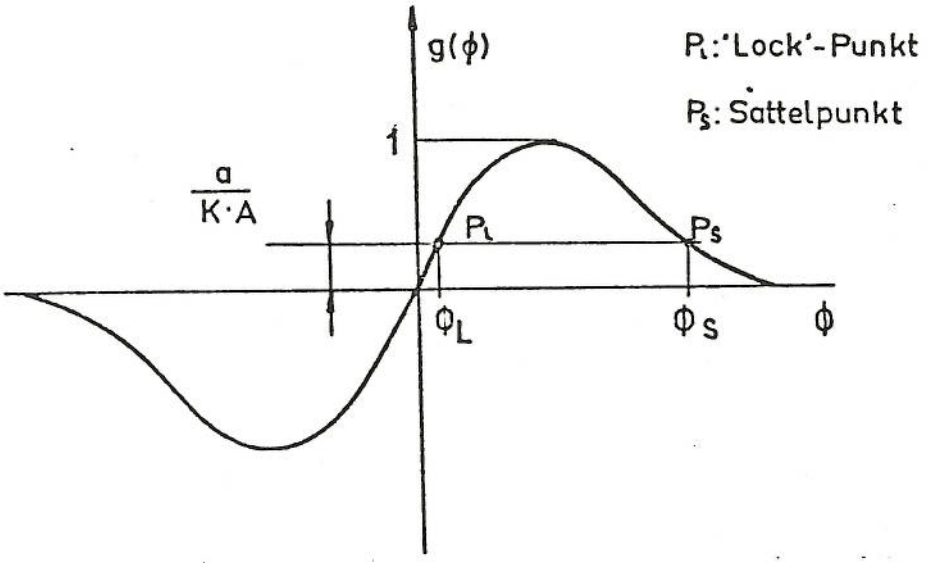


Fig. 6-1. Gleichgewichtslagen des DLL 1.Ordnung

Es existieren nur Lösungen unter der Bedingung

$$\frac{a}{K \cdot A} < 1$$

Der 'Lock-Punkt' ist definiert als der stabile Arbeitspunkt,während der Sattelpunkt eine instabile Gleichgewichtslage darstellt.

Die Dichtefunktion $p(\phi;t)$ kann durch Lösen der F-P Gleichung gefunden werden,vorausgesetzt wir können zeigen,dass $\phi(t)$ ein Markov Prozess ist.Falls $n(t,\phi)$ ein weisser Rauschprozess wäre,wäre dies der Fall (Abs.4.2).Dies ist aber nicht der Fall.Wenn hingegen die Bandbreite des Rauschprozesses viel grösser ist als diejenige des Regelkreises - was bei allen praktischen Anwendungen zutrifft - können wir in guter Näherung schreiben

$$R_{n,n}(\tau) \cong \delta(\tau) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_{n,n}(\tau,\phi)\,d\tau = \delta(\tau)\, S_{n,n}(\omega=0,\phi) \qquad (4)$$

und

$$n(t,\phi) \cong \sqrt{\frac{N}{2}(\phi)}\, d\beta(t)$$

Kernannahmen und Grundlagen dieser Dissertation; sie sind allerdings eklatant falsche Interpretationen der angeführten Literatur-Referenzen.

Das Leistungsdichtespektrum $S_{n,n}(\omega,\phi)$ wurde in den Abschnitten 3.3 und 3.4 berechnet. Der Wert $S_{n,n}(\omega=0,\phi)$ entspricht der spektralen Leistungsdichte des (angenähert) weissen Rauschprozesses. Man schreibt dafür meistens

$$\frac{N(\phi)}{2} \triangleq S_{n,n}(\omega=0,\phi) \tag{5}$$

Die Approximation eines nicht Markov Prozesses durch einen Markov Prozess wird z.B. in [15,S.385], [14,vol.1,sec.7] behandelt. Eine sehr mathematische Darstellung findet man in [20]. Unter der gemachten Annahme schreiben wir für (2)

$$d\phi = (-KAg(\phi)+a)\cdot dt \quad -K\cdot\sqrt{\frac{N(\phi)}{2}}\cdot d\beta(t) \tag{6}$$

Aus (6) findet man mit (4,21) sofort die Intensitätskoeffizienten der korrespondierenden F-P Gleichung

$$K_0(\phi) = -K\cdot A\, g(\phi) + a$$
$$K_{0,0}(\phi) = K^2\cdot\frac{N(\phi)}{2}$$

Kernannahmen und Grundlagen dieser Dissertation; sie sind allerdings eklatant falsche Interpretationen der angeführten Literatur-Referenzen.

Damit

$$\frac{\partial p(\phi,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial\phi}\left[(-KAg(\phi)+a)\cdot p(\phi;t)\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\left[K^2\,\frac{N}{2}(\phi)\cdot p(\phi;t)\right] \tag{7}$$

6.3. STATIONAERE LOESUNG FUER DIE RANDBEDINGUNG $p(\phi=\pm\infty)=0$

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass für alle physikalisch realisierbaren Trackingsysteme die Dichte funktion $p(\phi;t)$ gegen

Null strebt für $t \to \infty$. Die praktische Konsequenz dieser Aussage ist, dass jeder DLL eine Ueberwachungsschaltung braucht (Abs.5.1), die feststellt ob sich die Trajektorie $\phi(t)$ innerhalb eines vorgegebenen Intervalls $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ aufhält.

Falls eine stationäre Lösung $p(\phi)$ existierte, müsste gelten

$$\frac{\partial p(\phi,t)}{\partial t} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \quad p(\phi;t_1) = p(\phi;t_2)$$

und damit auch

$$-\frac{d}{d\phi}\left[K_0(\phi)\cdot p(\phi)\right] + \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2}{d\phi^2}\left[K_{0,0}(\phi)\cdot p(\phi)\right] = 0 \qquad (8)$$

Voraussetzungsgemäss ist $p(\phi)$ nur noch von der Variabeln ϕ abhängig, und wir haben statt der partiellen F-P Gleichung eine gewöhnliche, homogene Differentialgleichung in ϕ, deren Lösung durch zwei Randbedingungen eindeutig bestimmt ist. Falls wir für ϕ alle Werte auf der reellen Achse zulassen, dann müssen wir die Bedingungen für $\phi = \pm\infty$ formulieren und verlangen (Abs.5.3)

$$K_0(\phi)\cdot p(\phi)\Big|_{\pm\infty} = 0 \quad ; \quad \frac{d}{d\phi}\left[K_{0,0}(\phi)\cdot p(\phi)\right]\Big|_{\pm\infty} = 0 \qquad (9)$$

Wir integrieren (8)

$$-K_0(\phi)\cdot p(\phi) + \frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left[K_{0,0}(\phi)\cdot p(\phi)\right] = -J_0 \qquad (10)$$

J_0 ist der Dichtestrom (4,26). Er ist über das ganze Intervall konstant und muss deshalb verschwinden. Für die Lösung der homogenen Differentialgleichung (10) finden wir

$$p(\phi) = \frac{C}{K_{0,0}(\phi)}\cdot \exp\left[2\cdot\int^{\phi}\frac{K_0(v)}{K_{0,0}(v)}\,dv\right] \qquad (11)$$

Die Konstante C ist durch die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\phi)\cdot d\phi = 1 \tag{12}$$

bestimmt.

Es wird sich als praktisch erweisen, für die folgenden Untersuchungen zwei neue Grössen einzuführen.

$$h_o(\phi,t) \triangleq \frac{2\cdot K_o(\phi,t)}{K_{o,o}(\phi,t)} \quad , \quad U_o(\phi,t) \triangleq -\int^{\phi} h_o(v,t)\,dv \tag{13}$$

$h_o(\phi,t)$ ist eine nichtlineare Rückstellkraft, die bei einer Abweichung eine Rückführung des Teilchens in den Gleichgewichtspunkt bewirkt. Man erhält diese Kraft durch Differentiation der Funktion $U_o(\phi,t)$. Die Grösse $U_o(\phi,t)$ wird daher zurecht als Potential bezeichnet.

Für eine Lösung der Form (11) muss notwendigerweise das uneigentliche Integral

$$\frac{1}{C} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{K_{o,o}(\phi)} \cdot \exp\left[-U_o(\phi)\right] d\phi \tag{14}$$

existieren. Wir werden zeigen, dass dies für kein physikalisch realisierbares System der Fall ist. Wir haben in (3,27a) gezeigt

$$\lim_{|\phi|\to\infty} K_{o,o}(\phi) = K^2 \lim_{|\phi|\to\infty} S_{n,n}(\omega=0,\phi) = \text{konst} < \infty \tag{15}$$

Für $K_o(\phi)$ gilt

$$\lim_{|\phi|\to\infty} K_o(\phi) = \text{konst} < \infty \tag{16}$$

Die Asymptoten der Potentialfunktion sind daher Geraden

$$U_o(\phi) \approx A_+ + m\cdot\phi \quad ; \phi \to \infty$$
$$U_o(\phi) \approx A_- + m\cdot\phi \quad , \phi \to -\infty \qquad (17)$$

Man sieht sofort, dass für kein m≠0 (d.h. a≠0) das Integral (14) existieren kann, sodass wir nur noch den Fall m=0 diskutieren müssen. Wegen der Symmetrien

$$K_o(-\phi) = -K_o(\phi)$$
$$K_{a,o}(-\phi) = K_{a,o}(\phi) \quad , a=0 \qquad (18)$$

genügt es, das Integral im Intervall $[0, \infty]$ zu studieren.

Notwendig und hinreichend für die Existenz des Integrals

$$\int_0^\infty \exp\left[2\cdot \frac{K_o(v)}{K_{a,o}(v)}\, dv\right] \cdot d\phi$$

ist das Cauchy Kriterium [21, S.235]

$$\exp\left[2\cdot \int^{\phi} \frac{K_o(v)}{K_{a,o}(v)}\, dv\right] < \frac{A}{\phi^p} \qquad (19)$$
$$\phi \geq d \quad ; \; p>1$$

Gleichwertig zu (19) ist

$$2\cdot \int^{\phi} \frac{K_o(v)}{K_{a,o}(v)} \cdot dv < \log\left(\frac{A}{\phi^p}\right) \qquad (20)$$

oder falls man die rechte Seite der letzten Ungleichung als Integral schreibt

$$-2\cdot \frac{K_o(\phi)}{K_{a,o}(\phi)} > \frac{p}{\phi} \qquad (21)$$

Andererseits ist jede durch ein physikalisch realisierbares Netzwerk-

paar erzeugte Korrelationsfunktion $R_{y1,y2}(\phi)=A\cdot g(\phi)$ absolut integrierbar

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R_{y_1,y_2}(\phi)|\, d\phi < \infty \qquad (22)$$

Diese Tatsache steht in Widerspruch zum geforderten asymptotischen Verhalten (21) und unsere Behauptung ist bewiesen.

Das Resultat scheint auf den ersten Blick in Widerspruch zum Experiment zu stehen,wo man eine 'stationäre' Dichtefunktion feststellt. Zur,vorläufig,qualitativen Erklärung dieses scheinbaren Widerspruches greifen wir auf unser einfaches Modell zurück.Wie wir in Abschnitt (4.5) gesehen haben,bewegen sich die 'Moleküle' vollkommen regellos. Die Funktion $g(\phi)$ wirkt wie eine Rückstellkraft,die jedes 'Molekül' bei einer Abweichung seiner Lage vom Gleichgewichtspunkt $\phi=0$ (für a=0) wieder dorthin zu treiben trachtet.

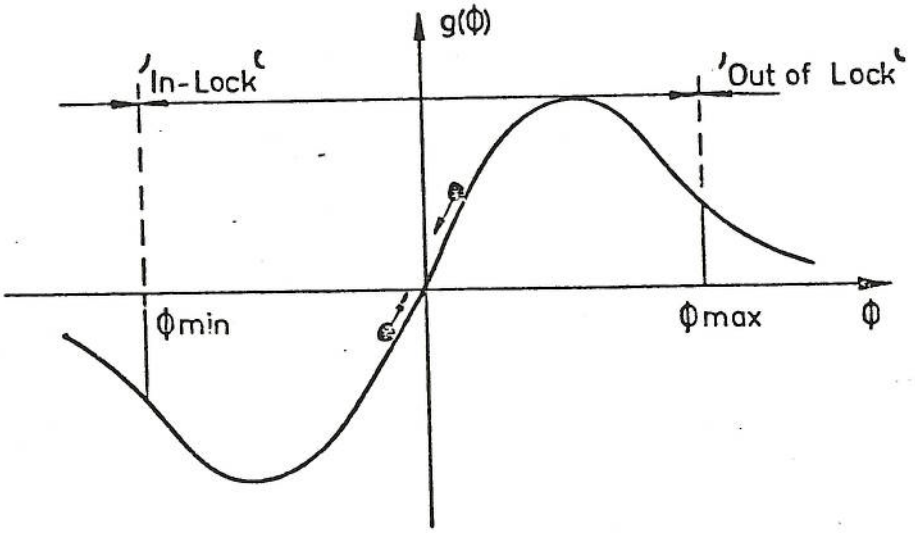


Fig. 6-2. Arbeitsbereiche des DLL

Ueberschreitet aber ein Teilchen den Punkt maximaler Rückstellkraft, so hat die Rückstellkraft wohl noch das richtige Vorzeichen,nimmt aber betragsmässig mit wachsender Distanz ab.Offensichtlich strebt $g(\phi)$ zu schnell gegen Null,sodass die Diffusion dominiert.Nur im Falle wc die Ungleichung (21) erfüllt wäre,würde im ganzen Bereich $[-\infty,\infty]$ die Rückstellkraft überwiegen und die Existenz einer stationären Lösung garantieren.In unserem Falle ist es offensichtlich so, dass alle Teilchen,unter Umständen erst nach sehr langer Zeit,einen

der Extremalpunkte überschreiten und sich dann über die ganze ϕ -Achse verteilen.Die Dichtefunktion $p(\phi,t)$ strebt immer mehr gegen eine Gleichverteilung.Wegen der Unendlichkeit des Intervalls muss dabei die Normierungskonstante C über alle Grenzen wachsen.

Die mittlere Lebensdauer einer Trajektorie kann ausserordentlich gross werden.Sofern dies der Fall ist,befinden sich praktisch alle Moleküle während sehr langer Zeit innerhalb $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ und man spricht von einem quasistationären Zustand.Erst im Grenzübergang $t\to\infty$ verschwinden diese Zustände.Um quantitative Aussagen über diesen Fragenkomplex machen zu können,müssen wir die zeitabhängige Lösung der F-P Gleichung kennen.

6.4. BESTIMMUNG DER ZEITABHAENGIGEN LOESUNG DURCH VARIABELN-SEPARATION

Wir studieren das Verhalten der Trajektorie solange sie sich innerhalb des Intervalls $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ aufhält.Genauer:Zur Zeit $\tau=0$ besitzt die Trajektorie die Anfangsverteilung $q(\phi;t=0)$.Sobald eine der Trajektorien zum ersten Mal eine der Grenzen ϕ_{min}, ϕ_{max} erreicht,wird sie gestoppt.Dies führt zu den Randbedingungen

$$q(\phi_{min};t) = q(\phi_{max},t) = 0 \qquad (23)$$

Innerhalb des Intervalls gehorcht $q(\phi;t)$ der F-P Gleichung (7). Solange sich die Trajektorie in diesem Intervall aufhält,liefert das System einen genügend genauen Schätzwert T ('IN-LOCK'),ausserhalb arbeitet es ungenügend.('OUT OF LOCK')Wo man die Grenze zwischen den beiden Funktionsbereichen legt,hängt von der speziellen Anwendung ab.

Nach Konstruktion des Prozesses ist

$$W(t) = \int_{q_{min}}^{q_{max}} q(\phi;t)\,d\phi \quad ; \; W(t)<1 \text{ für } t>0 \qquad (24)$$

gleich der WSK,dass sich die Trajektorie innerhalb des Bereiches aufhält.Integriert man die F-P Gleichung über ϕ ,so ergibt sich

$$\frac{dW(t)}{dt} = J_0(\phi_{min};t) - J_0(\phi_{max};t) \qquad (25)$$

Daraus durch zeitliche Integration

$$W(t)-1 = \int_0^t \left[J_0(\phi_{min};t') - J_0(\phi_{max};t') \right] \cdot dt' \qquad (26)$$

Dies kann physikalisch einfach interpretiert werden. Der Wahrscheinlichkeits-Dichtestrom $J_0(\phi;t)$ an den Rändern ist wegen den dort absorbierten Trajektorien ungleich Null. Der zeitlich integrierte Strom an den beiden Rändern enspricht den 'Molekülen', die im Zeitintervall $[0,t]$ dort angekommen sind. Man könnte $q(\phi;t)$ zu einer normierbaren Dichtefunktion erweitern, indem man an den beiden Randstellen $\phi = \phi_{min}$, resp. ϕ_{max} je einen Diracstoss mit dem Gewicht

$$c_{min} = \int_0^t |J_0(\phi_{min};t')| \cdot dt' \; ; \; c_{max} = \int_0^t J_0(\phi_{max};t') \cdot dt' \qquad (27)$$

einführen würde.

Zur Lösung der F-P Gleichung machen wir einen Separationsansatz

$$q(\phi;t) = \sum_{i=0}^{\infty} r(t) \cdot v_i(\phi) \qquad (28)$$

Es soll $v_i(\phi)$ ein im Intervall $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ vollständiges Orthogonalsystem sein, d.h. wir denken uns die Lösung nach einem solchen entwickelt. Wir gehen mit unserem Ansatz in (7) und nehmen an, dass alle Bedingungen für eine gliedweise Differentiation erfüllt sind. (Man zeigt später, dass die Lösung tatsächlich diese Eigenschaft hat)

$$\frac{dr(t)}{dt} \cdot v_i(\phi) = r(t) \cdot \left\{ -\frac{d}{d\phi}\left[K_0(\phi) \cdot v_i(\phi) \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{d\phi^2} \cdot \left[K_{0,0}(\phi) \cdot v_i(\phi) \right] \right\} \qquad (24)$$

$$v_i(\phi) \Big|_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} = 0 \quad ; \quad i = 0, \cdots \infty \qquad (29)$$

Gl.(29) muss für jedes ϕ und t erfüllt sein. Dies ist dann, und nur dann, erfüllt, falls gilt

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\lambda_i \cdot r(t) \quad \Longleftrightarrow \quad r(t) = c_i \cdot \exp(-\lambda_i \cdot t) \tag{30}$$

Für jedes i erhalten wir eine gewöhnliche,homogene und lineare Differentialgleichung 2.Ordnung

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\left[K_{o,o}(\phi)\cdot v_i(\phi)\right] - \frac{d}{d\phi}\left[K_o(\phi)\cdot v_i(\phi)\right] + \lambda_i \cdot v_i(\phi) = 0 \tag{31}$$

Mit Hilfe der Transformation

$$v_i(\phi) = \frac{\eta(\phi)}{K_{o,o}(\phi)} \cdot u_i(\phi)$$

$$\eta(\phi) = \exp\left[\int^{\phi} \frac{K_o(\nu)}{K_{o,o}(\nu)}\, d\nu\right] \tag{32}$$

kann man wegen $K_{o,o}(\phi) > 0$ für alle ϕ Gl.(31) auf die selbstadjungierte Form

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[u_i(\phi)\right] + \left[-\frac{d}{d\phi}\left(\frac{K_o(\phi)}{K_{o,o}(\phi)}\right) - \left(\frac{K_o(\phi)}{K_{o,o}(\phi)}\right)^2 + \frac{2\cdot\lambda_i}{K_{o,o}(\phi)}\right]\cdot u_i(\phi) = 0 \tag{33}$$

mit den Randbedingungen

$$u_i(\phi)\Big|_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} = 0 \tag{33a}$$

bringen.In dieser Form haben wir ein homognes Randwertproblem vom Sturm-Liouville Typ vor uns.Die Eigenfunktionen $u_i(\phi)$ mit den zugehörigen Eigenwerten λ_i bilden ein vollständiges Orthogonalsystem mit der Gewichtsfunktion $1/K_{o,o}(\phi)$.[22,Band 2,S.20]

$$\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{1}{K_{a,o}(\phi)} \, u_m(\phi) \cdot u_i(\phi) \cdot d\phi = 0 \qquad (34)$$

Ursprüngliches und transformiertes Eigenwertproblem besitzen die gleichen Eigenwerte. Ersetzt man $v_i(\phi)$ durch die Eigenfunktion $u_i(\phi)$ so erhält man

$$q(\phi;t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot \frac{1}{K_{a0}(\phi)} \cdot u_i(\phi) \exp\left[\int^{\phi} \frac{K_o(v)}{K_{a0}(v)} dv - \lambda_i \cdot t \right] \qquad (35)$$

Die unbekannten Faktoren c_i bestimmt man aus der Anfangsverteilung $q(\phi;t=0)$ unter Ausnützung der Orthogonalitätseigenschaften von $u_n(\phi)$. Für $q(\phi;t=0) = \delta(\phi - \phi_o)$ erhält man so z.B.

$$c_m = \frac{\frac{1}{\eta(\phi_o)} \cdot u_m(\phi)}{\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{1}{K_{a0}(\phi)} \cdot u_m^2(\phi) d\phi} \qquad (36)$$

In diesem Falle ist $q(\phi;t/\phi=\phi_o;t=0)$ die Uebergangswahrscheinlichkeit. Wegen der Markov Eigenschaft lassen sich daraus Verbundswahrscheinlichkeiten beliebiger Ordnung berechnen.

Aus physikalischen Gründen ('Diffusionsexplosion') müssen alle Eigenwerte $\lambda_i \geq 0$ sein. Wir beweisen:

Satz

Für die Eigenwerte λ_i des regulären Sturm-Liouville Problems

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[u_i(\phi)\right] + \left[G(\phi) + \frac{2\lambda_i}{K_{a,o}(\phi)}\right] \cdot u_i(\phi) = 0 \qquad (37)$$

$$G(\phi) \triangleq -\frac{d}{d\phi}\left[\frac{K_o(\phi)}{K_{a,o}(\phi)}\right] - \left[\frac{K_o(\phi)}{K_{a,o}(\phi)}\right]^2$$

mit den Eigenschaften

$$\text{I)}\quad G(\phi) \text{ stetig in } [\phi_{min}, \phi_{max}]$$

$$\text{II)}\quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_0(\phi)}{K_{0,0}(\phi)} \right| d\phi < \infty \quad \Rightarrow |U_0(\phi)| < \dot{\infty} \qquad (38)$$

$$\text{III)}\quad K_{0,0}(\phi) > 0 \qquad \phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$$

und den Randbedingungen

$$U_i(\phi_{min}) = U_i(\phi_{max}) = 0$$

gelte

$$\lambda_i > 0 \quad ; \; i = 0, \dots \infty$$

Beweis

Teil 1: $\lambda = 0$ kein Eigenwert

Wir beweisen zunächst indirekt, dass $\lambda = 0$ kein Eigenwert ist. Wenn $\lambda = 0$ ein Eigenwert wäre, dann müsste eine Eigenfunktion $\tilde{v}_0(\phi)$ existieren, derart dass

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left[K_{0,0}(\phi) \tilde{V}_0(\phi) \right] - \frac{d}{d\phi} \left[K_0(\phi) \tilde{V}_0(\phi) \right] = 0 \qquad (39)$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (39) lautet

$$\tilde{V}_0(\phi) = \frac{1}{K_{0,0}(\phi)} \cdot \exp\left[-U_0(\phi)\right] \cdot \left[D_1 + D_0 \cdot \int_{\phi_{min}}^{\phi} \exp\left[U_0(v)\right] dv \right] \qquad (40)$$

Die zwei Konstanten D_0, D_1 sind durch die Randbedingungen bestimmt. Wegen (II) ist $\exp(U_0(\phi)) \neq 0$, $\phi \in [\phi_{min}, \phi_{max}]$. Zur Erfüllung der Randbedingungen muss $\tilde{v}_0(\phi)$ verschwinden

$$\Rightarrow \quad D_0 = D_1 = 0 \tag{41}$$

Da die Transformation (32) die Eigenwerte und Nullstellen der Eigenfunktion nicht verändert, gilt das Gesagte auch für die selbstadjungierte Form (33).

Teil 2: $\lambda_i > 0$, $i = 0, .. \infty$

Wir führen den Beweis indirekt. Der Beweis beruht auf der Identität von Picone [22, Band 2, S.13]

Annahme A: Es sei $\lambda_0 < 0$ der Eigenwert und $u_0(\phi)$ die zugehörige Eigenfunktion für die gelte

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[u_0(\phi)\right] + \left[G(\phi) + \frac{2\lambda_0}{K_{0,0}(\phi)}\right] \cdot u_0(\phi) = 0$$

$$u_0(\phi_{min}) = u_0(\phi_{max})$$

Die Funktion $\tilde{u}_0(\phi)$ sei eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[\tilde{u}_0(\phi)\right] + G(\phi) \cdot \tilde{u}_0(\phi) = 0 \tag{44}$$

für die gelte

$$\tilde{u}_0(\phi) \neq 0 \quad \text{in} \quad [\phi_{min}, \phi_{max}] \tag{45}$$

Wir bilden den Ausdruck

$$\frac{u_0}{\tilde{u}_0} \cdot \left[\tilde{u}_0 \cdot u_0' - \tilde{u}_0' \cdot u_0\right]' \tag{46}$$

Dabei haben wir davon Gebrauch gemacht, dass $\tilde{u}_o(\phi) \neq 0$ ist im betrachteten Intervall. Durch Ausführen der Differentiation in (46) erhält man die Identität von Picone. Durch Ersetzen der zweiten Ableitung erhält man schlussendlich

$$\left\{ \frac{u_o}{\tilde{u}_o} \left[\tilde{u}_o \cdot u_o' - \tilde{u}_o' u_o \right] \right\}' = (u_o')^2 \cdot \left(-\frac{2\lambda_o}{K_{ao}} \right) + \left[u_o' - \frac{\tilde{u}_o'}{\tilde{u}_o} \cdot u_o \right]^2 \qquad (47)$$

Durch Integration von(47) über das Intervall $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ folgt

$$\frac{u_o}{\tilde{u}_o} \cdot \left[\tilde{u}_o \cdot u_o' - \tilde{u}_o' \cdot u_o \right] \Big|_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} = \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \left[u_o^2 \cdot -\frac{2\lambda_o}{K_{ao}} \cdot \left(u_o' - \frac{\tilde{u}_o'}{\tilde{u}_o} \cdot u_o \right)^2 \right] d\phi \qquad (48)$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen muss die linke Seite von (48) verschwinden. Auf der rechten Seite ist wegen der Eigenschaft III , der Annahme A und wegen (45) der Integrand im ganzen Intervall positiv und kann deshalb nicht verschwinden ⇒ Widerspruch. Wir können unsere Annahme A nicht aufrecht erhalten. Es existiert keine Eigenfunktion $u_o(\phi)$ mit $\lambda_o < 0$ die Gleichung (37) mit den geforderten Randbedingungen erfüllt.

qed.

Es können somit nur positive Eigenwerte $\lambda_o > 0$ existieren. Physikalisch bedeutet dies, dass alle Trajektorien für $t \to \infty$ die Grenzen erreichen und dass keine stationären Zustände existieren können. Man kann sogar zeigen [22, Band 2, S.17] dass der Satz gilt

Oszillationstheorem

Falls $G(\phi)$ und $K_{o,o}(\phi)$ in $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ stetig sind und $K_{o,o}(\phi) > 0$ so gibt es eine abzählbar unendliche Folge (diskretes Spektrum)

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \cdots \lambda_n \to \infty$$

mit den zugehörigen Eigenfunktionen

$$u_0(\phi), u_1(\phi) \cdots,$$

welche nichttriviale Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\phi^2}\left[u_n(\phi)\right] + \left[G(\phi) + \frac{2\lambda_n}{K_{o,o}(\phi)}\right]\cdot u_n(\phi) = 0$$

sind und den Randbedingungen

$$u_n(\phi_{min}) = u_n(\phi_{max})$$

genügen. Die Eigenfunktionen $u_n(\phi)$ sind bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und haben genau n Nullstellen im Inneren des Intervalls $[\phi_{min}, \phi_{max}]$.

Bemerkenswert ist, dass [23, S.173] die Eigenwerte λ_n für alle Randwertaufgaben vom Sturm-Liouville Typ das gleiche asymptotische Verhalten zeigen

$$\lambda_n \approx \frac{n^2 \cdot \pi^2}{[\phi_{max} - \phi_{min}]^2} \qquad (49)$$

6.5. QUASISTATIONAERE ZUSTAENDE

Für alle Zeiten $t \gg 1/\lambda_1$ spielt nur noch der erste Summand der Reihe (28) eine Rolle

$$q(\phi;t) \cong c_o \cdot v_o(\phi) \cdot \exp(-\lambda_o \cdot t) \qquad (50)$$

Es hat sich ein quasistationärer Zustand ausgebildet, der dadurch gekennzeichnet ist, dass $q(\phi;t)$ exponentiell zerfällt, aber seine Form beibehält. In der Praxis kommen ausserordentlich kleine Werte von λ_o vor, sodass ein Experimentator glaubt, einen stationären Zustand vor sich zu haben. Die höheren Eigenwerte λ_n, die asymptotisch wie

n^2 wachsen,beschreiben also recht unwichtige Details der schnellen Transientvorgänge,die beim Uebergang von der gegebenen Anfangsverteilung in den quasistationären Zustand auftreten.Wenn λ_o viel kleiner als λ_1 ist,dann sind schon alle schnellen Transientvorgänge abgeklungen,während das Produkt $(\lambda_o \cdot t)$ noch praktisch Null ist.In diesem Falle hat unsere asymptotische Lösung praktisch für das ganze Zeitintervall Gültigkeit.Die Anfangsverteilung $q(\phi ; t = 0)$ ist dann näherungsweise durch

$$q(\phi; t=0) \cong c_o \cdot v_o(\phi) \tag{51}$$

mit

$$c_o \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} v_o(\phi) \cdot d\phi \cong 1$$

gegeben.Wir können das auch auffassen,als ob wir mit der Beobachtung unseres Systems erst zur Zeit $t \gg 1/\lambda_1$ beginnen würden.

Die beiden dominanten Eigenwerte λ_o und λ_1 haben wichtige physikalische Bedeutung.Befand sich unser System zur Zeit t in der Lage $\phi = 0$ (man kann auch jeden anderen Wert nehmen),so befinden sich für kleine Zeiten $t \ll 1/\lambda_o$ praktisch alle Trajektorien in der Umgebung des Nullpunktes.Wir dürfen deshalb näherungsweise die Funktion $g(\phi)$ linearisieren und das Intervall $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ durch $[-\infty, \infty]$ ersetzen.
Aus dem gleichen Grund vernachlässigen wir die Abhängigkeit des Intensitätskoeffizienten $K_{o,o}(\phi)$ von ϕ.

$$g(\phi) = \left.\frac{dg(\phi)}{d\phi}\right|_{\phi=0} \cdot \phi \qquad ; \; K_{oo}(\phi) = K^2 \frac{N}{2} \tag{52}$$

Unter diesen Annahmen lautet (31)

$$K^2 \frac{N}{4} \cdot \frac{d^2}{d\phi^2}\left[v_n(\phi)\right] + \frac{d}{d\phi}\left[KA \cdot \left(\frac{dg}{d\phi}\Big|_{\phi=0}\right) \cdot \phi \cdot v_n(\phi)\right] + \lambda_n v_n(\phi) = 0 \tag{53}$$

Im Tabellenwerk [24] findet man

$$\lambda_n = n\left(KA \cdot \left.\frac{dg(\phi)}{d\phi}\right|_o\right) \tag{54}$$

gilt nur im Grenzübergang für $N \to \infty$!

Die scheinbaren Widersprüche

$$\lambda_o = 0 \quad (\text{statt } \lambda_o > 0)$$

$$\lambda_n \approx n \quad (\text{statt} \approx n^2)$$

erklären sich dadurch, dass unsere Theorie nur für ein endliches Intervall gültig ist. Gl.(53) beschreibt das Verhalten des Systems also nur für kleine Zeiten angenähert richtig. Der inverse Wert $1/\lambda_1$

$$1/\lambda_1 = \frac{1}{K \cdot A \cdot \frac{dq}{d\phi}\Big|_{\phi=0}} = \alpha_T \qquad (55)$$

ist aber nichts anderes als die Systemzeitkonstante α_T des Regelkreises.

Auch der Eigenwert λ_o hat eine anschauliche Bedeutung. Die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ innerhalb $[\phi_{min}, \phi_{max}]$ einer Trajektorie ist nach Gl.(5,50)

$$E(\tau_L) = \int_0^\infty W(t)\,dt \quad ; \quad W(t) = \int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} q(\phi;t)\,d\phi \qquad (56)$$

Verwendet man für $q(\phi;t)$ die quasistationäre Verteilung (50) erhält man

$$E(\tau_L) = 1/\lambda_o \qquad (57)$$

Leider ist es nicht möglich für die Eigenfunktionen $u_o(\phi)$ eine analytische Lösung zu finden und man ist auf numerische Methoden angewiesen. Es sei hier auf die in jüngster Zeit erschiene Publikation [25] verwiesen.

6.6. DIE STATIONAERE DICHTEFUNKTION DES ERNEUERUNGSPROZESSES

Für den eindimensionalen Prozess $\phi(t)$ lautet die F-P Gleichung des Erneuerungsprozesses im stationären Zustand (5,42)

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\left[\frac{K_{a0}(\phi)}{S(\phi)}\cdot p(\phi)\right]+\frac{d}{d\phi}\left[\frac{K_0(\phi)}{S(\phi)}\cdot p(\phi)\right]=\frac{\delta(\phi-\phi_0)}{E(T_L)} \qquad (58)$$

mit den Randbedingungen

$$p(\phi_{min})=p(\phi_{max})=0 \qquad (58a)$$

Durch einmalige Integration erhalten wir

$$\frac{K_0(\phi)}{S(\phi)}\cdot p(\phi)-\frac{1}{2}\frac{d}{d\phi}\left[\frac{K_{a0}(\phi)}{S(\phi)}\cdot p(\phi)\right]=\frac{1}{E(T_L)}\cdot\left[\sigma(\phi-\phi_0)-U_0\right] \qquad (59)$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung (59) ist die Summe von homogener und partikulärer Lösung

$$p(\phi)=\frac{S(\phi)}{K_{a0}(\phi)}\cdot\exp\left[-U_0(\phi)\right]\cdot\left\{D_1+\frac{2}{E(T_L)}\cdot\int_{\phi_{min}}^{\phi}\left[-\sigma(\nu-\phi_0)+D_0\right]\cdot\exp\left[U_0(\nu)\right]d\nu\right\} \qquad (60)$$

Zur Bestimmung der beiden Konstanten D_0, D_1 machen wir von den Randbedingungen Gebrauch und erhalten für $\phi_{min}, D_1 = 0$ und für $\phi = \phi_{max}$

$$D_0=\frac{\int_{\phi_0}^{\phi_{max}}\exp\left[U_0(\phi)\right]d\phi}{\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}}\exp\left[U_0(\phi)\right]d\phi} \qquad (61)$$

Damit wird

$$p(\Phi) = \frac{2 \cdot S(\Phi)}{E(T_L) \cdot K_{a0}(\Phi)} \cdot \exp\left[U_0(\Phi)\right] \cdot \int_{\Phi_{min}}^{\Phi} \left[D_0 - \sigma(v-\Phi_0)\right] \exp\left[U_0(v)\right] dv \quad (62)$$

Das gefundene Resultat lässt sich mit Hilfe des Stromes $J_o(\Phi)$ anschaulich interpretieren. Die rechte Seite von Gl.(59) ist gleich dem Strom $J_o(\Phi)$

$$J_0(\Phi) = \frac{1}{E(T_L)} \cdot \left[\sigma(\Phi-\Phi_0) - D_0 \right] \quad (63)$$

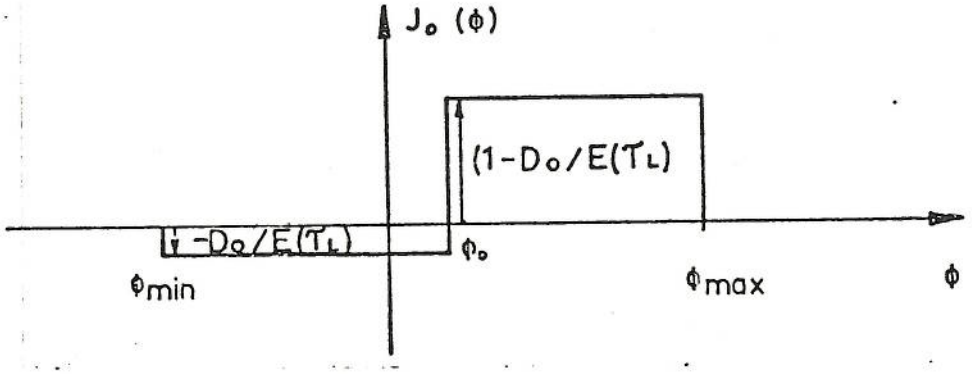


Fig. 6-3. WSK-Dichtestrom im stationären Zustand

Der Strom ist zeitlich konstant. Die an den Rändern abfliessenden Teilchen werden laufend durch die an der Stelle $\Phi = \Phi_o$ liegende Quelle ersetzt. Die Grösse der Ströme zu den Rändern Φ_{min}, resp. Φ_{max} hin teilt sich dabei im Verhältnis D_o zu $(1-D_o)$ auf. (Der Strom ist eine vektorielle Grösse, daher sind die Vorzeichen für positive und negative Φ verschieden.)

Darstellung der Dichtefunktion in der normierten Variabeln $x = \Phi/\Phi_N$ —

In vielen Fällen ist es praktischer, die dimensionsbehaftete Grösse durch eine dimensionslose zu ersetzen

$$X = \frac{\Phi}{\Phi_N} \quad (64)$$

Dann gelten zwischen den Funktionen in der ursprünglichen und der dimensionslosen Variabeln die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
p_N(x) &= \Phi_N \cdot p(\Phi_N \cdot x) & x_{min} &= \Phi_{min}/\Phi_N \\
S_N(x) &= S(\Phi_N \cdot x) & x_{max} &= \Phi_{max}/\Phi_N \\
K_{o,N}(x) &= K_{o,N}(\Phi_N \cdot x) & x_o &= \Phi_o/\Phi_N \\
K_{o,o:N}(x) &= K_{o,o}(\Phi_N \cdot x) & D_{o,N} &= D_o \\
U_{o,N}(x) &= 1/\Phi_N \cdot U_o(\Phi_N \cdot x)
\end{aligned}
\qquad (65)
$$

Um die Notation nicht zu sehr mit Indices zu belasten, vereinbaren wir auch für die normierten Funktionen die gleichen Namen zu verwenden.

Wir führen die neuen Grössen

$$K_\Phi \triangleq \frac{A}{\Phi_N} \qquad \frac{1}{\alpha_T} = 4 \cdot B_L \triangleq K \cdot K_\Phi \qquad (66)$$

ein. α_T ist die Zeitkonstante des linearisierten Regelkreises mit

$$g(\Phi) = \frac{K_\Phi}{A} \cdot \Phi \qquad (67)$$

B_L ist die äquivalente Bandbreite. Für den Quotienten $K_o(x)/K_{o,o}(x)$ finden wir dann

$$\frac{K_o(x)}{K_{o,o}(x)} = - \frac{g(x)}{2 \cdot \Phi_N \left[\frac{2 \cdot B_L \cdot S_{n_i,n_i}(\omega=0,x)}{A^2} + \frac{2 B_L S_{n_n,n_n}(\omega=0)}{A^2} \right]} \qquad (68)$$

$$+ \frac{a}{2 \cdot \Phi_N \cdot 4 B_L \cdot \Phi_N \left[\frac{2 B_L \cdot S_{n_i,n_i}(\omega=0,x)}{A^2} + \frac{2 B_L \cdot S_{n_n,n_n}(\omega=0)}{A^2} \right]}$$

Wir definieren weiter

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_s} &= \frac{2 B_L (A_1 A_2)^2}{f_p A^2} \quad \circledast \\
\bar{N}(x) &= \frac{f_p}{(A_1 A_2)^2} \cdot S_{n_i,n_i}(\omega=0,x) \quad \circledast \\
\frac{1}{\rho_n} &\triangleq \frac{2 \cdot B_L S_{n_n n_n}(\omega=0)}{A^2}
\end{aligned}
\qquad (69)
$$

$\circledast$ Für zeitkontinuierliche Regelkreise fällt f_p weg

ρ_n ist das Signal zu Geräusch Verhältnis (SNR) des linearisierten Kreises wenn man annimmt, dass n(t) ein weisser Rauschprozess und $n_i(t;\varphi)=0$ ist. $1/\rho_s \cdot N(x)$ ist die entsprechende Grösse für das Eigenrauschen. Man beachte, dass diese Grösse unabhängig von der Signalleistung ist, wie es sein muss. Der Uebersichtlichkeit halber wollen wir die Resultate und Definitionen diese Abschnittes in Tabellenform zusammenfassen

$$p(x)=\frac{\alpha_T}{E(\tilde{L})}\cdot\frac{S(x)}{[1/(\rho_s\cdot N(x))+1/\rho_n]}\cdot\exp[-\Phi_N U_0(x)]\int_{x_{min}}^{x}[D_0-G(x'-x_0)]\cdot\exp[\Phi_N U_0(x')]dx' \quad (70)$$

mit

$$U_0(x)=-\frac{1}{\Phi_N}\cdot\int_{}^{x}\frac{1}{[1/\rho_s\cdot\bar{N}(x)-1/\rho_n]}\cdot\left[-g(x')+\frac{a\cdot\alpha_T}{\Phi_N}\right]dx'$$

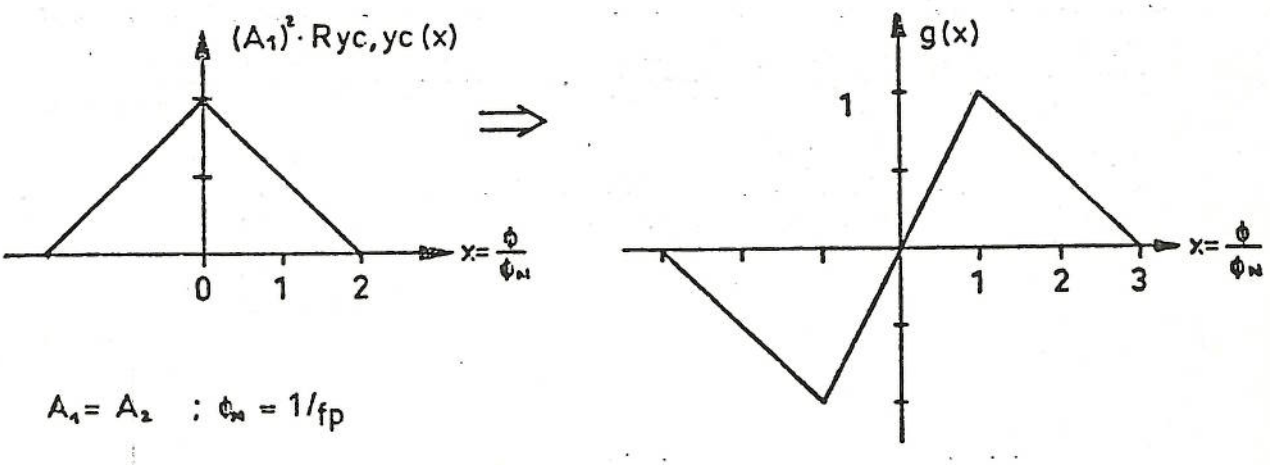
$$\frac{1}{\rho_s}=\frac{2B_L A^2}{f_p(A_1A_2)^2}\quad;\quad \bar{N}(x)=\frac{f_p\cdot S_{n_i n_i}(\omega=0,x)}{(A_1A_2)^2} \quad (71)$$

$$\frac{1}{\rho_n}=\frac{2B_L\cdot S_{n_m n_m}(\omega=0)}{A^2}\;;\;\alpha_T=\frac{1}{K_\phi\cdot K}\;;\;B_L=\frac{1}{4\cdot\alpha_T}\;;\;K_\varphi=\frac{A}{\Phi_N}$$

$$D_0=\frac{\int_{x_0}^{x_{max}}\exp[\Phi_N\cdot U_0(x)]dx}{\int_{x_{min}}^{x_{max}}\exp[\Phi_N\cdot U_0(x)]dx}$$

Stationäre Dichtefunktion für den digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität

Wir wählen (siehe auch Beispiel in Abs.3.4.)



$A_1=A_2\;;\;\Phi_N=1/f_p$

Fig. 6-4. Korrelationsfunktion und Nichtlinearität

Dies entspricht der Nichtlinearität bei der berührungslosen Geschwindigkeitsmessung (Kap.8).Das Leistungsdichtespektrum $S_{n,n}(\omega,\phi)$ wurde in Abschnitt 3.4 berechnet und in den Fig.3-5 dargestellt.Fig.6-5 zeigt die normalisierte Potentialfunktion $\phi_N \cdot U_o(x)$ für $x_o=0$ und $x_o=0.5$

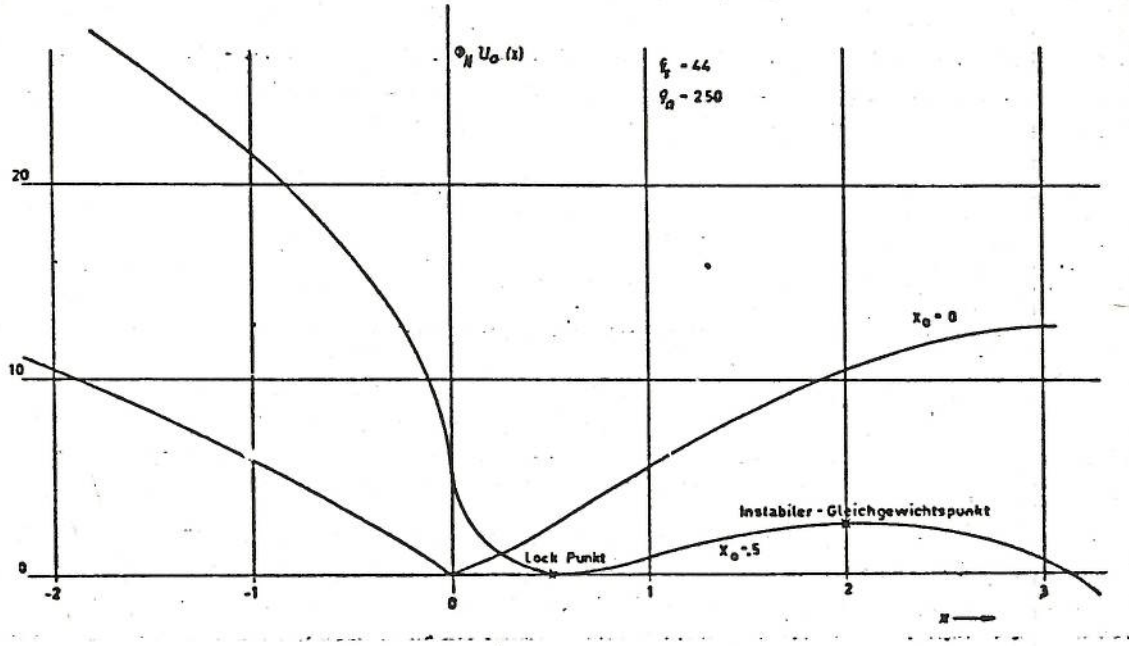


Fig. 6-5. Normalisierte Potentialfunktion

Wenn man sich den stochastischen Prozess $\phi(t)$ als Irrfahrt eines Moleküls vorstellt,so bewegt sich das Teilchen in diesem Potentialtopf.Je steiler und höher die Flanken,desto eher bleibt das Teilchen am Boden des Topfes.Die nichtlineare Rückstellkraft $h_o(x)$ ist die Ableitung der Potentialfunktion nach der Ortsvariabeln x

$$h_o(x) = -\frac{dU_o(x)}{dx} \qquad (72)$$

Die Kraft ist im Potentialminimum (Lock-Punkt) Null.Für $x_o = 0$ strebt die Funktion $U_o(x)$ für $x = \pm\infty$ gegen eine Konstante,d.h. $h_o(x)$ verschwindet.Für $x_o \neq 0$ existiert ein weiterer,aber instabiler Gleichgewichtspunkt.

Die Dichtefunktion p(x) ist in Fig.6-6a,die kumulative WSK in Fig.6-6b dargestellt.

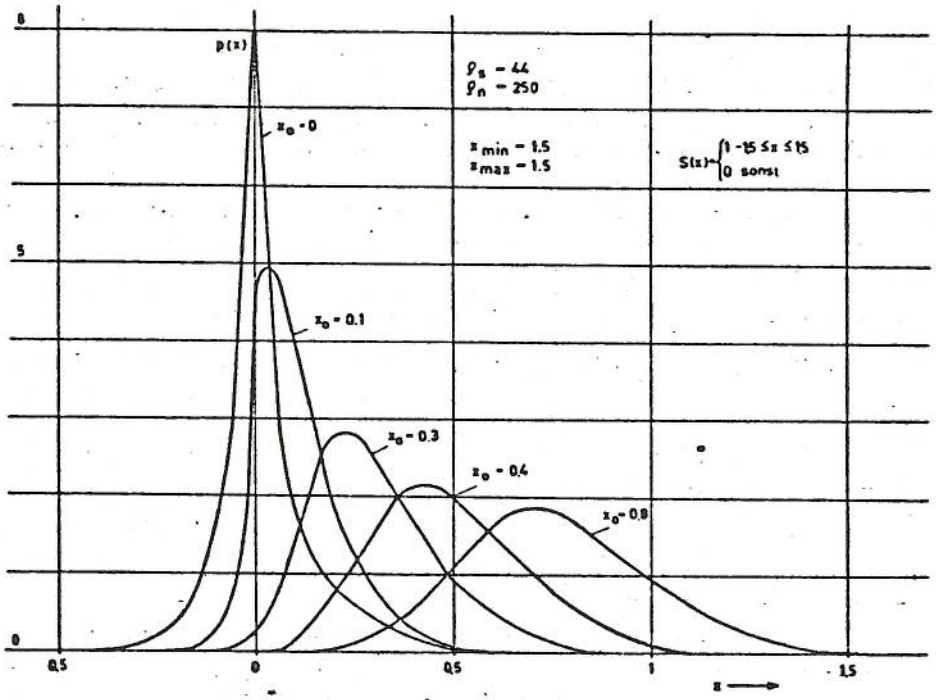


Fig. 6-6a. Dichtefunktion p(x)

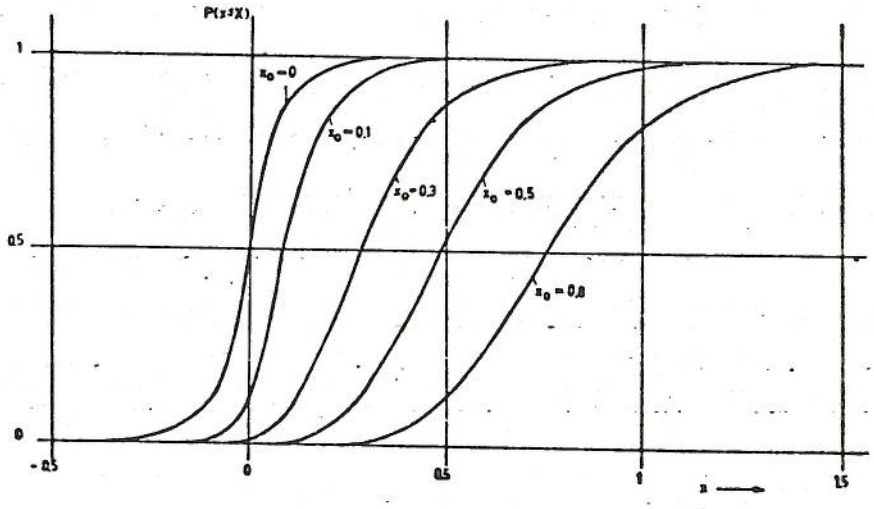


Fig. 6-6b. Kumulative Wahrscheinlichkeit $P(x \le X)$

Den Einfluss des Fremdrauschens illustriert Fig.6-7.

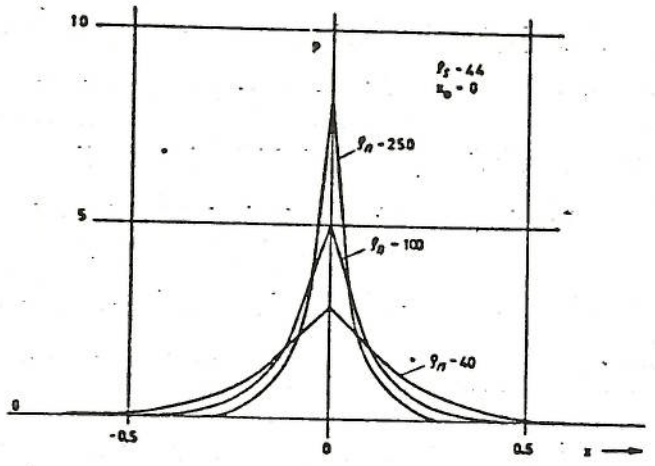


Fig. 6-7. Einfluss von ϱ_n auf p(x)

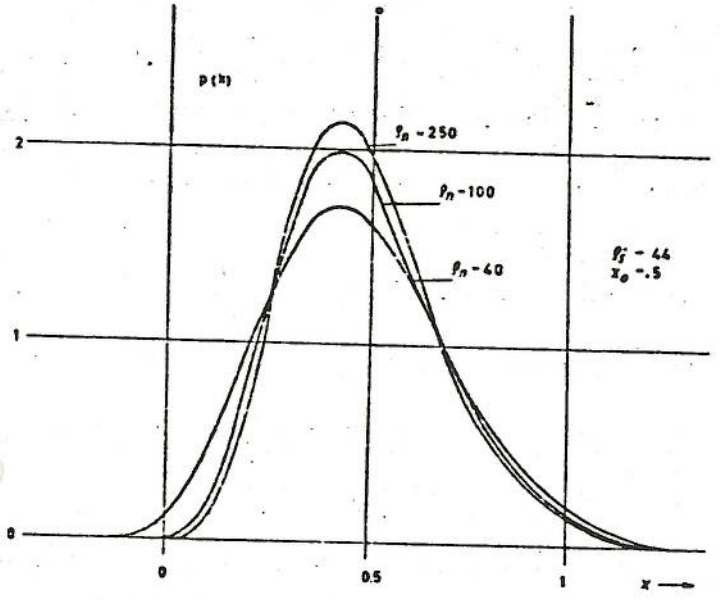


Fig. 6-7a. Einfluss von ϱ_n auf p(x)

Wegen der Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums $S_{ni,ni}(\omega=0,x)$ von x ist der Einfluss des Fremdrauschens für $x_o=0$ viel stärker als für $x_o \neq 0$

Zur Verifikation der Theorie wurden durch Computersimulation zwei Dichtefunktionen für $x_o = 0.5$ und $x_o = 0$ ermittelt. Das Programm 'SIMEOS' simuliert den tatsächlichen Regelkreis, nicht das äquivalente Modell. Wegen der endlichen Simulationszeit von $600 \cdot \alpha_T$ sind die Messungen mit einer Streuung behaftet. Auch in der Simulation äussert sich die starke Abhängigkeit des Leistungsdichtespektrums $S_{ni,ni}(\omega = 0,x)$ von x in einer grösseren Breite der Dichtefunktion für $x_o \neq 0$. Die Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist sehr gut. Dies ist nicht selbstverständlich, da die Bandbreite des geschlossenen Regelkreises nur noch ungefähr eine bis zwei Zehnerpotenzen kleiner ist als die Bandbreite des Signals und da T nur noch ungefähr 4mal grösser ist als die Zeitkonstante α_T. (Man vergleiche mit den Annahmen von Gl.(3,3)und(6,4)

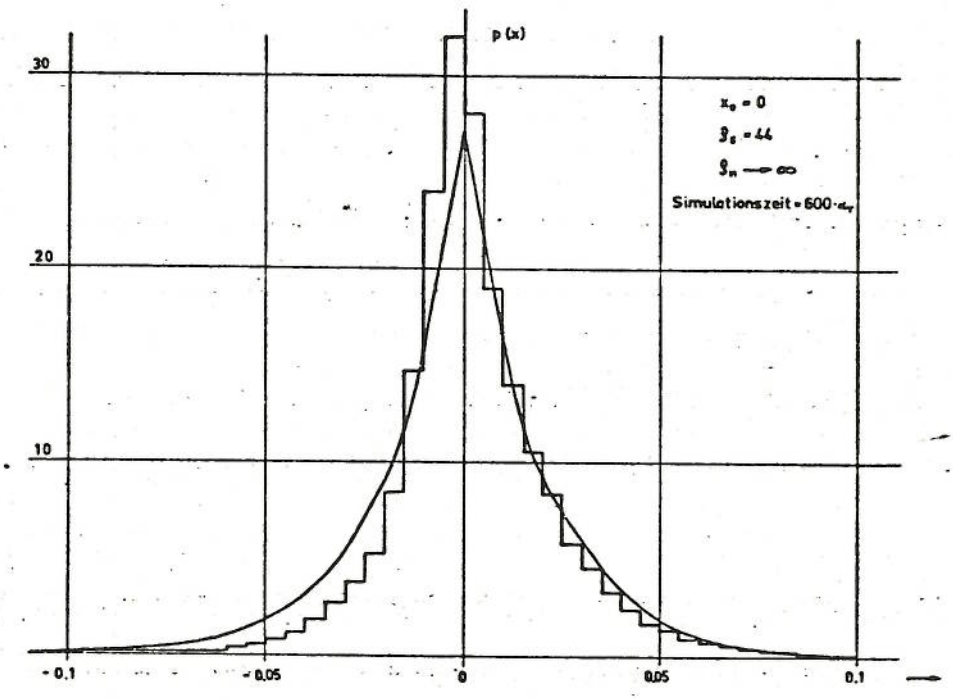


Fig. 6-8a. Experimentelle und theoretische Dichtefkt.

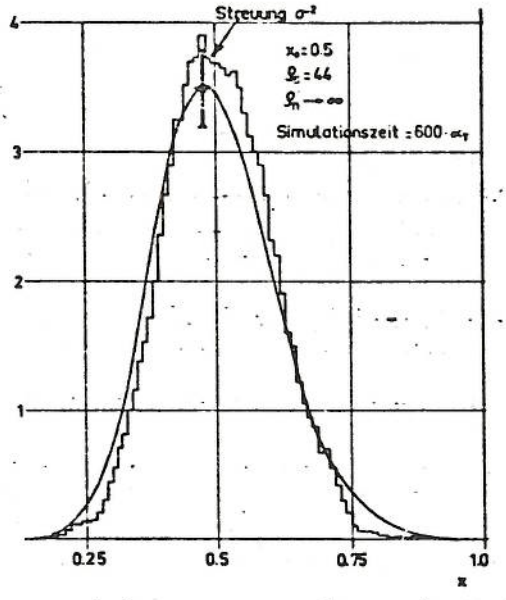


Fig. 6-8b. Experimentelle und theoretische Dichtefkt.

Im allgemeinen ist der lineare Mittelwert E(x) nicht identisch mit dem Lockpunkt x_o. Die Abweichung ist umso ausgeprägter je grösser $J_o(x)$ an einer der beiden Grenzen ist. Für $x_o \neq 0$ setzt sich der Messfehler aus der Streuung σ^2_x und einem systematischen Fehler E(x) zusammen. Für die praktische Auslegung eines Systems bedeutet dies, dass ein DLL erster Ordnung nur für langsame Veränderliche T ($x_o \ll 1$) verwendet werden sollte. Die Streuung σ^2_x ist in Fig. 6-9 dargestellt.

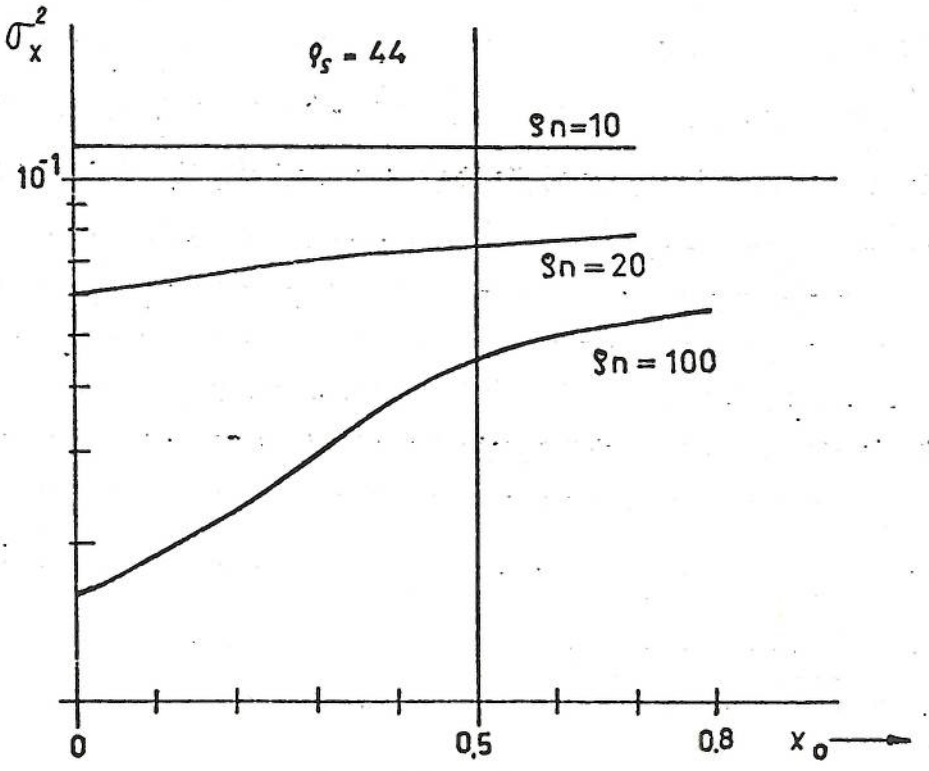


Fig. 6-9. Streuung σ^2_x in Funktion von x_o

6.7. $E(\tau_L)$ UND MITTLERE ANZAHL ZYKLEN PRO ZEITEINHEIT

Durch Einbeziehen der Funktion $S(\phi)$ in den Differentialoperator können alle Fälle auf den einen Fall mit

$$S^*(x) = \begin{cases} 1 & x_{min} < x < x_{max} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{73}$$

zurückführen. Wir kommen so zur Differentialgleichung für den stochastisch äquivalenten Prozess [14]

$$d\phi = \frac{1}{S(\phi)} \cdot \left[-KA\, g(\phi) + a \right] dt - \frac{K}{\sqrt{S(\phi)}} \cdot \sqrt{\frac{N(\phi)}{2}} \cdot d\beta(t) \tag{74}$$

mit Rücksprung nach ϕ_o genau in den Punkten $\phi = \phi_{min}$, ϕ_{max}. Die zu (74) korrespondierende Differentialgleichung liefert genau die gleichen Lösungen wie die ursprüngliche F-P Gleichung.

Im stationären Zustand gilt für den Erneuerungsprozess (74)

$$E(d\phi) = \left\{ -kA \cdot E\left[\frac{g(\phi)}{S(\phi)}\right] + a \cdot E\left[\frac{1}{S(\phi)}\right] \right\} dt \tag{75}$$

oder mit

$$\overline{\dot{\phi}} \triangleq \lim_{\Delta t \to 0} \frac{E\left[\phi(t+\Delta t) - \phi(t)\right]}{\Delta t} \tag{75a}$$

$$\overline{\dot{\phi}} = -KA \cdot E\left[\frac{g(\phi)}{S(\phi)}\right] + a \cdot E\left[\frac{1}{S(\phi)}\right] \tag{75b}$$

$\overline{\dot{\phi}}$ ist die mittlere Geschwindigkeit mit der sich eine Trajektorie des äquivalenten Prozesses (74) im stationären Zustand fortbewegt. Andererseits ergibt eine beidseitige Integration der F-P Gleichung (59) über $[\phi_{min}, \phi_{max}]$, unter Berücksichtigung der Randbedingungen (58a)

$$\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{K_o(\phi)}{S(\phi)} \cdot p(\phi)\, d\phi = \frac{1}{E(\tilde{\tau}_L)} \cdot \left[-D_o(\phi_{max} - \phi_{min}) + (\phi_{max} - \phi_o) \right] \tag{76}$$

Aber

$$\frac{K_o(\phi)}{S(\phi)} = -\frac{1}{S(\phi)} \cdot KA \cdot g(\phi) + \frac{a}{S(\phi)}$$

Daraus folgt

$$\int_{\phi_{min}}^{\phi_{max}} \frac{K_o(\phi)}{S(\phi)} \cdot p(\phi) \cdot d\phi = -KA \cdot E\left[\frac{g(\phi)}{S(\phi)}\right] + a \cdot E\left[\frac{1}{S(\phi)}\right] \qquad (77)$$

Daher

$$\bar{\dot{\phi}} = \frac{1}{E(\tau_L)} \cdot \left[-D_o \cdot (\phi_{max} - \phi_{min}) + (\phi_{max} - \phi_o)\right]$$

$$= \frac{1}{E(\tau_L)} \cdot \left[(1-D_o) \cdot (\phi_{max} - \phi_o) - D_o \cdot (\phi_o - \phi_{min})\right] \qquad (78)$$

Die Geschwindigkeit ist eine vektorielle Grösse.Wir spalten auf

$$\bar{\dot{\phi}} = \bar{\dot{\phi}}_+ + \bar{\dot{\phi}}_- \qquad (79)$$

mit

$$\bar{\dot{\phi}}_+ = \frac{1}{E(\tau_L)} \cdot (1-D_o) \cdot (\phi_{max} - \phi_o)$$

$$\bar{\dot{\phi}}_- = -\frac{1}{E(\tau_L)} \cdot D_o \cdot (\phi_o - \phi_{min}) \qquad (80)$$

Die mittlere Zeit die eine Trajektorie braucht um von ϕ_o nach ϕ_{min}

oder ϕ_{max} zu gelangen, ist gleich dem Quotienten aus Weg und Geschwindigkeit

$$E(\tau_L)_+ = \frac{\Phi_{max} - \Phi_0}{\dot{\Phi}_+} = \frac{E(\tau_L)}{1 - D_0} \qquad (81)$$

$$E(\tau_L)_- = \left|\frac{\Phi_{min} - \Phi_0}{\dot{\Phi}_-}\right| = \frac{E(\tau_L)}{D_0}$$

77) Meistens interessiert man sich für die inverse Grösse $1/E(\tau_L)_{\pm}$. Sie entspricht der mittleren Anzahl Trajektorien pro Zeiteinheit die rechts(links) ankommen

$$N_+ = \frac{1 - D_0}{E(\tau_L)} \qquad N_- = \frac{D_0}{E(\tau_L)} \qquad (82)$$

78) Vergleicht man (82) mit dem Strom $J(\phi)$, so sind die Grössen N_{+-}, resp. N_- gerade gleich dem Strom in der entsprechenden Richtung.

Es ist ebenfalls von Interesse, die WSK eines 'Ausser-Tritt-Fallens' zu kennen. Zu diesem Zwecke betrachten wir die Zufallsvariable, welche zur Zeit t die Gesamtzahl der Zyklen angibt. Falls wir näherungsweise annehmen, diese Zufallsvariable sei poissonverteilt, erhalten wir für die WSK eines Ausfalls

79) $$P(t) \simeq 1 - \exp\left[-(N_+ + N_-)\cdot t\right] \qquad (83)$$

Der exakte Wert müsste allerdings via Gl.(6,35) berechnet werden. Lindsey zeigt anhand eines Beispiels [15, S.684] dass (83) eine gute Näherung darstellt.

80) Für den digitalen DLL mit dreieckförmiger Nichtlinearität

Die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ einer Trajektorie ist sehr stark vom Signal zu Geräuschverhältnis abhängig

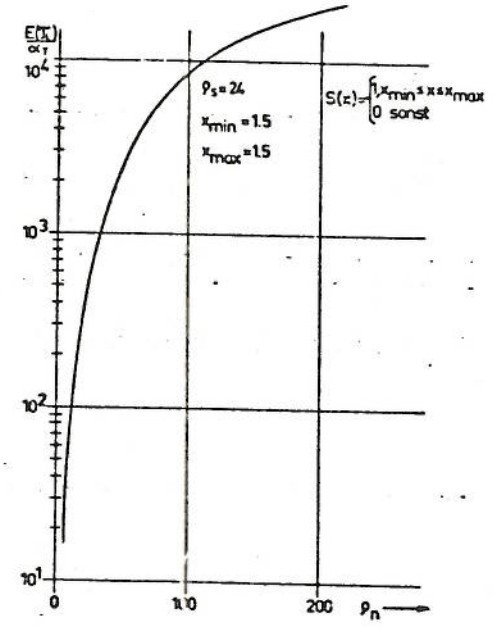


Fig. 6-10. $E(\tau_L)$ in Funktion von ρ_n

Wie zu erwarten sinkt $E(\tau_L)$ mit wachsendem x_o sehr stark ab

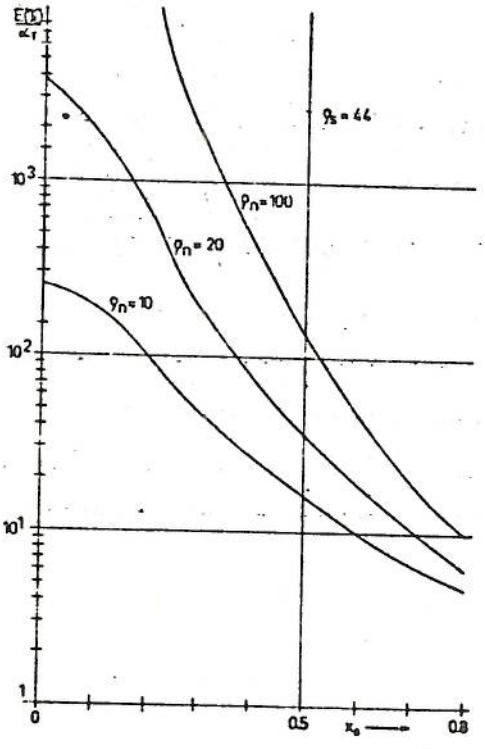


Fig. 6-11. $E(\tau_L)$ in Funktion von ρ_n und x_o

Da die Zeitkonstante der schnellen Transienten viel kleiner ist als die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ der Trajektorie, erwartet man, dass der genaue Ort, wohin eine Trajektorie nach Erreichen von x_{min}, resp. x_{max} springt, keinen grossen Einfluss haben kann. Zur Verifikation dieser Ueberlegung wurde für $x_o = 0.5$ der Rücksprung einmal nach x_o und das andere Mal nach $x = 0$ gemacht. Die mit α_T normierte Grösse $^oE(\tau_L)$ ist für diese beiden Fälle in Tab.1 zusammengestellt.

Rücksprung der Trajektorie nach x = ...	ρ_s	ρ_n	x_o	$E(\tau_L) \cdot 1/\alpha_T$
x = 0.5	44	250	0.5	170.8
x = 0.	44	250	0.5	172.6
x = 0.5	44	100	0.5	124
x = 0.0	44	100	0.5	126
x = 0.5	44	40	0.5	67.3
x = 0.0	44	40	0.5	69

Tab. 1

Ebenfalls intuitiv klar ist, dass die untere Grenze x_{min} für $x_o \neq 0$ einen immer kleineren Einfluss auf $E(\tau_L)$ hat, je grösser x_o wird. Die Trajektorien erreichen fast mit Sicherheit nur noch die obere Grenze. (Tab.2)

Offset x_o	x_{min}	x_{max}	$E(\tau_L) \cdot 1/\alpha_T$
0.5	-.75	1.5	170.8089
	-.1.0	1.5	170.8089
	-.1.25	1.5	170.8089

Tab. 2

6.8. APPROXIMATION DES ERNEUERUNGSPROZESSES DURCH EINEN MARKOV PROZESS MIT REFLEKTIERENDEN BARRIEREN

Bei der Berechnung der zeitabhängigen Dichtefunktion $q(\phi;t)$ haben wir gesehen, dass sich quasistationäre Zustände ausbilden können,

sofern $\lambda_o \ll \lambda_1$

$$q(\phi;t) \cong c_o \cdot v_o(\phi) \cdot \exp(-\lambda_o t) \cong c_o \cdot v_o(\phi)$$
$$1/\lambda_1 \ll t < 1/\lambda_o \quad . \tag{84}$$

Gleichung (84) besagt,dass wir im betrachteten Zeitintervall den Strom $J_o(\phi;t)$ vernachlässigen.Im Falle,wo wir eine stationäre Lösung durch Konstruktion eines Erneuerungsprozesses gewonnen haben,wird der abfliessende Strom $J_o(\phi)$ durch eine Quelle der Stärke $1/E(\tau_L)$ im Punkt ϕ_o kompensiert.Falls die mittlere Lebensdauer $E(\tau_L)$ sehr gross ist,dürfen wir diesen Strom vernachlässigen. Unter diesen Voraussetzungen berechnen wir die stationäre Dichtefunktion durch Lösen der F-P Gleichung

$$-\frac{1}{2}\frac{d^2}{d\phi^2}\left[\frac{K_{oo}(\phi)}{S(\phi)} \cdot p(\phi)\right] + \frac{d}{d\phi}\left[\frac{K_o(\phi)}{S(\phi)} \cdot p(\phi)\right] = 0 \tag{85}$$

mit den Randbedingungen

$$J_o(\phi_{min}) = J_o(\phi_{max}) = 0$$

Diese Randbedingungen bedeuten physikalisch,dass alle Trajektorien, die die Ränder erreichen,total reflektiert werden.Die Lösung (85) ist dann von der Form

$$p(\phi) = \frac{C\,S(\phi)}{K_{o,o}(\phi)} \cdot \exp\left[-U_o(\phi)\right] \tag{86}$$

Die Konstante C wird durch die Normierungsbedingung geliefert.Man zeigt leicht,dass für die zeitabhängige Lösung $q(\phi;t)$ mit den Randbedingungen (85) $\lambda_o = 0$ ein Eigenwert ist.

6.9. OPTIMIERUNG DES DLL

Allgemeines

Zur Optimierung des Regelkreises können die Parameter des Filters F(p) und der Nichtlinearität g(φ) benützt werden .Die Optimierungskriterien hängen von der jeweiligen Anwendung ab.In vielen Fällen wünscht man σ^2_ϕ zu minimalisieren;für gewisse Anwendungen ist die Maximierung von $E(\tau_L)$ sinnvoll.Mathematisch gesprochen muss das Funktional

$$\underset{F(p),g(\Phi)}{G\left[F(p);g(\Phi)\right]} \Rightarrow \text{Extr} \qquad (87)$$

bei gegebenem T(t) bezüglich eines Kriteriums minimalisiert,bzw.maximalisiert werden.Angesichts der komplizierten Abhängigkeiten ist eine Lösung des allgemeinen Problems sehr schwierig.In der Literatur existieren einige wenige Arbeiten.Stiffler [37] und vor allem Shaft [19] diskutieren den Einfluss der Nichtlinearität auf verschiedene Grössen wie σ^2_ϕ, $E(\tau_L)$ oder minimale Aquisitionszeit.Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf die Optimierung der Nichtlinearität des DLL erster Ordnung mit dreieckförmiger Korrelationsfunktion $R_{yc,yc}(\phi)$. Die Optimierungskriterien sind σ^2_ϕ und $E(\tau_L)$ .Obwohl mathematisch nur ein Spezialfall,vermitteln die Resultate zumindest einen Anhaltspunkt über die Grössenordnung der erreichbaren Verbesserung bei komplizierten Fällen.Die Frage der optimalen Zeitkonstanten α_T ,bei gegebener Nichtlinearität,wird in Kap.8 diskutiert.

Optimale Auslegung der Nichtlinearität für den digitalen Dll mit dreieckförmiger Korrelationsfunktion $R_{yc,yc}(\phi)$

Durch Verändern der Abtastfrequenz entsteht aus der Korrelationsfunktion von Fig. 3-5a eine trapezförmige Funktion.

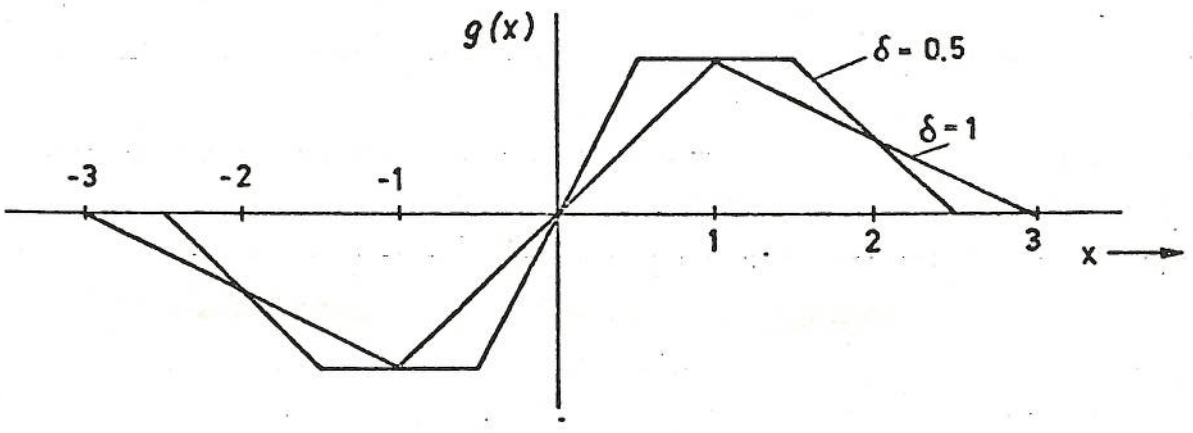


Fig. 6-12. Nichtlinearität g(φ) für verschiedene δ

Wir führen den Parameter δ ,definiert durch

$$\delta = \frac{f_{p\Delta}}{f_p} \quad ; \quad f_{p\Delta} \triangleq \text{Abtastfrequenz bei dreieckiger Nichtlinearität} \tag{88}$$

ein.Für $\delta = 1$ erhalten wir die früher benützte Nichtlinearität,mit wachsendem δ nähert sich die Funktion $g(\phi)$ immer mehr einem Rechteck.Es ist zu vermuten,dass eine rechteckige Nichtlinearität 'optimaler ' ist,da die Rückstellkraft schon für die kleinste Abweichung x ihren maximalen Wert annimmt.(siehe z.B. [19], [37])

Bei einer Aenderung der Abtastfrequenz bleibt das Signal zu Geräusch nicht konstant.Wir schreiben die Korrelationsfunktion des Fremdrauschens (Gl.3,32) leicht um

$$\begin{aligned} R_{n_1n_1}(m) = (A_1A_2)^2 \cdot R_{y_c y_c}(m) \cdot \left[\frac{2}{A_1^2} R_{n_1n_1}(m) - \frac{R_{n_1n_1}(m+2)}{A_1^2} - \frac{R_{n_1n_1}(m-2)}{(A_1)^2} \right] \\ + (A_1A_2)^2 \frac{R_{n_2n_2}(m)}{(A_2)^2} \left[2 \cdot R_{y_c y_c}(m) - R_{y_c y_c}(m+2) - R_{y_c y_c}(m-2) \right] \\ + (A_1 \cdot A_2)^2 \cdot \frac{R_{n_2n_2}(m)}{(A_2)^2} \cdot \left[2 \cdot \frac{R_{n_1n_1}(m)}{A_1^2} - \frac{R_{n_1n_1}(m+2)}{A_1^2} - \frac{R_{n_1n_1}(m-2)}{A_1^2} \right] \end{aligned} \tag{89}$$

Wir definieren

$$\varrho_{n,1} \triangleq \frac{A_1^2}{R_{n_1n_1}(0)} \qquad \varrho_{n,2} \triangleq \frac{A_2^2}{R_{n_2n_2}(0)}$$

$$r_{n_k n_k} \triangleq \frac{R_{n_k n_k}(m)}{R_{n_k n_k}(0)} \quad ; \; k = 1,2 \tag{90}$$

$\varrho_{n,1}$ und $\varrho_{n,2}$ sind die Signal zu Geräuschverhältnisse in den einzelnen Kanälen. Für die folgenden Berechnungen nehmen wir an,dass das Fremdrauschen eine exponentielle Korrelationsfunktion besitze

$$r_{n_k n_k}(m) = \exp\left(-\frac{m}{\alpha_{Nk}}\right) \quad ; \quad k = 1,2 \tag{91}$$

α_{Nk} : normalisierte Zeitkonstante (bezügl. f_p)

In Fig. 6-13 ist die Potentialfunktion $U_D(x)$ für verschiedene δ gezeichnet.

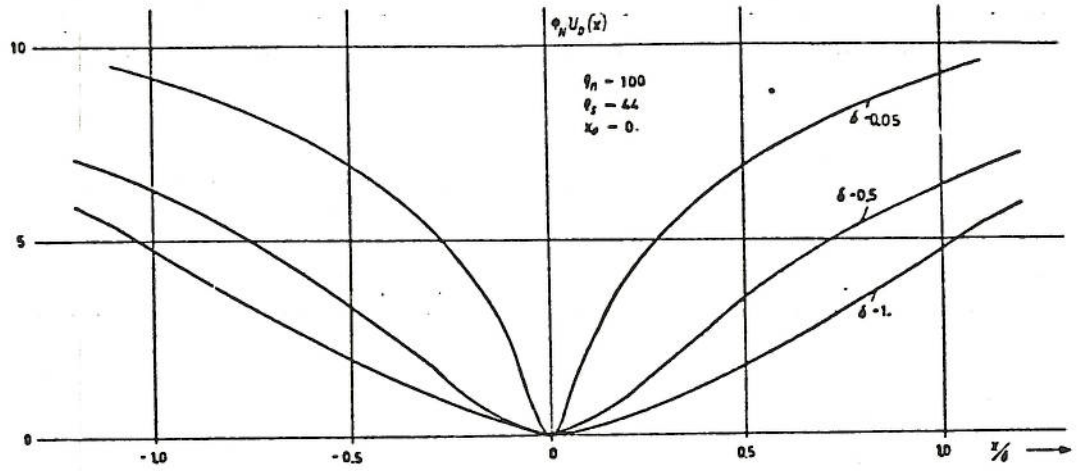


Fig. 6-13. Potentialfunktion für verschiedene δ

Den Verlauf von σ_x^2 in Funktion von δ für verschiedene $\varrho_{n,1}$ und $\varrho_{n,2}$ zeigt die nächste Figur. Dabei ist die Streuung für den 1. Fall wo die Bandbreite des Fremdrauschens in der gleichen Grössenordnung liegt wie diejenige des Signals durchwegs höher als im Falle $\alpha_{Nk} = 0$. (Weisses Rauschen)

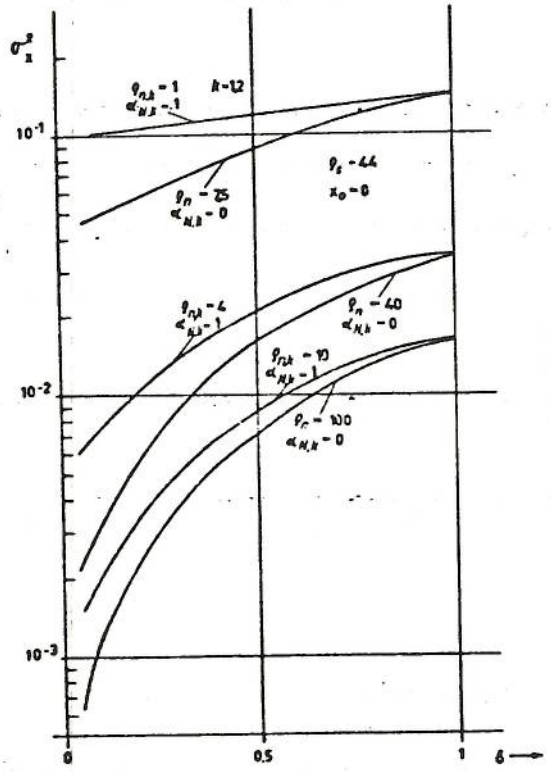


Fig. 6-14. σ_x^2 in Funktion von δ

Die Verbesserung in Funktion von ϱ_n ist umso ausgeprägter je grösser ϱ_n ist. In den meisten Fällen der Praxis wäre allerdings das umgekehrte Verhalten erwünscht. Für $\varrho_n = 10$ ist praktisch keine Verbesserung mehr vorhanden.

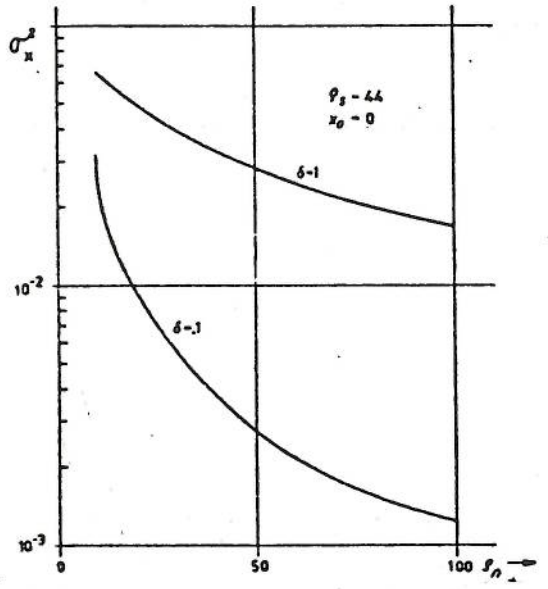


Fig. 6-15. σ_x^2 in Funktion von ϱ_n

Die Abhängigkeit der Streuung von x_0/δ ist in der nächsten Fig. dargestellt.

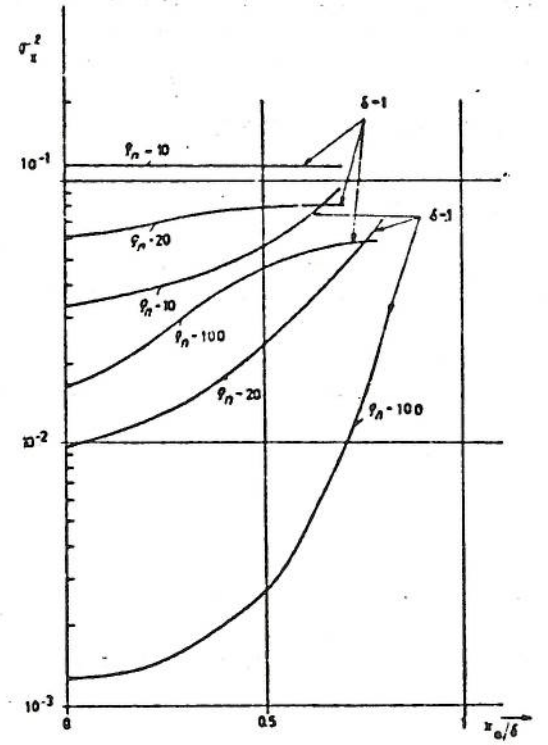


Fig. 6-16. σ_x^2 in Funktion von x_0/δ

Während σ_x^2 für alle hier gezeigten ϱ_n mit kleiner werdendem δ abnimmt, (optimaler wird) gilt dies nicht für $E(\tau_L)$. Für $\varrho_n = 7.5$ und $\alpha_{N,k} = 1$ liefert die trapezförmige Nichtlinearität ein schlechteres Resultat als die dreieckige ($\delta = 1$). Dies illustriert die Tatsache, dass die rechteckige Nichtlinearität nicht für alle Parameterwerte und Kriterien optimal ist.

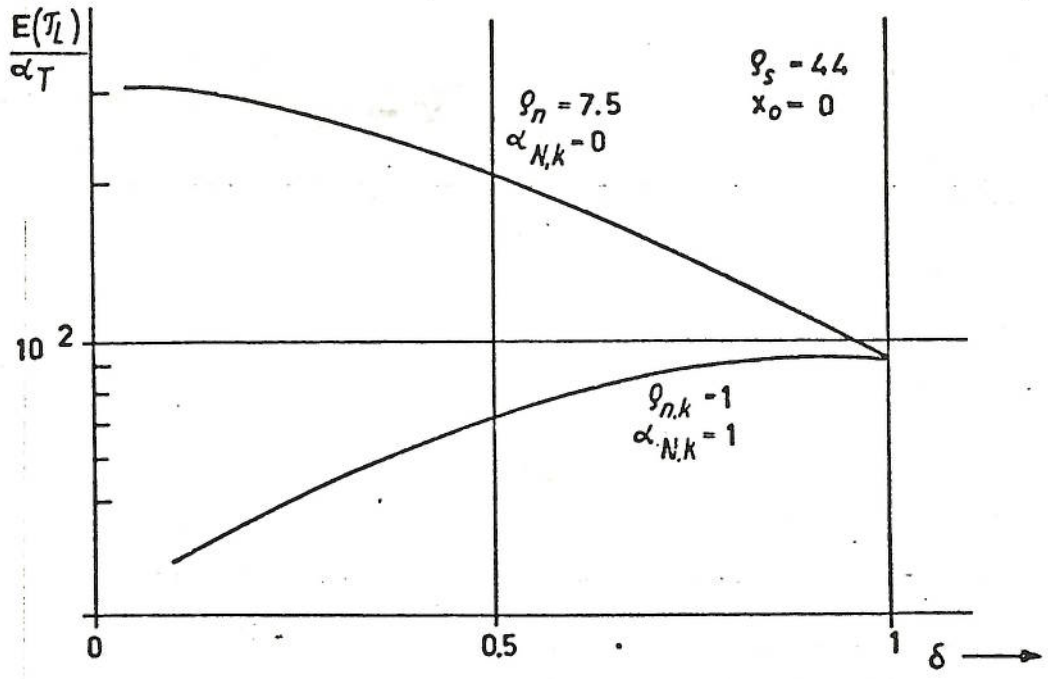


Fig. 6-17. $E(\tau_L)/\alpha_T$ in Funktion von δ

7. SERIESCHALTUNG VON TRACKINGSYSTEMEN ERSTER ORDNUNG

7.1. EINFUEHRUNG

Ein System erster Ordnung liefert nur für $dT/dt=0$ einen unverzerrten Schätzwert $E(T) = E(\hat{T})$ .Bei Wegmessungen - durch Integration der Geschwindigkeit - sind systematische Geschwindigkeitsmessfehler nicht zulässig.Allgemein liefert ein lineares System n-ter Ordnung für $dT/dt=a \cdot t^n$ einen unverzerrten Schätzwert.

Durch Kaskadierung zweier Systeme erster Ordnung entsteht

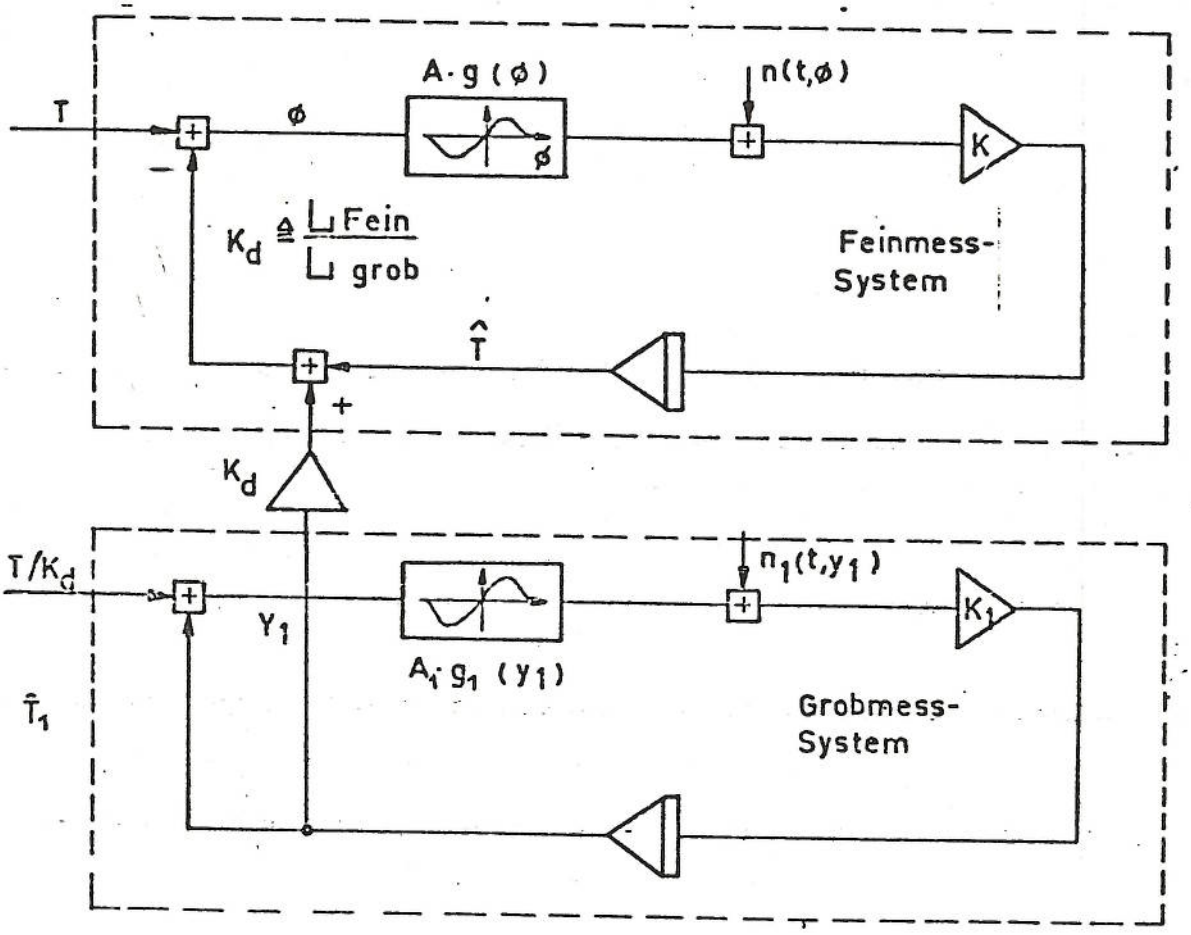


Fig. 7-1. Aequivalentes Ersatzbild eines gekoppelten Systems

ein System zweiter Ordnung.Der Grund,warum man statt einem Filter F(p),

eine Serieschaltung von zwei Einzelsystemen benützt,liegt darin,dass gegesätzliche Forderungen bezüglich Dynamik(Beschleunigungsvermögen) und Genauigkeit erfüllt werden müssen.Bei der Geschwindigkeitsmessung wird im Grobmess-System (CMS) die Geschwindigkeit auf einige Prozent genau bestimmt.Dieser Schätzwert wird einem Feinmess-System (PMS) als Sollgrösse eingegeben.Dieses System hat dann die Aufgabe,die kleinen Abweichungen des CMS im Mittel auszugleichen.Da der Abstand der Lichtquellen im Grobmess- viel kleiner als im Feinmess-System ist, sinkt wohl die Genauigkeit,dafür ist die Dynamik im CMS viel besser als im PMS. Man vergleiche die Gleichungen (8,5),(8,10),(8,17)

7.2. DIE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Die Differentialgleichungen für das in Fig.9-1 dargestellte System lauten

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{dt} &= -KA\,g(\Phi) - K_d K_1 A_1\, g_1(y_1) + a - K\,n(t,\Phi) - K_d K_1\, n_1(t,\Phi)\\ \frac{dy_1}{dt} &= -K_1 A_1\, g_1(y_1) + \frac{a}{K_d} \qquad\qquad - K_1\, n_1(t,y_1)\end{aligned} \tag{1}$$

Schreiben wir dieses Gleichungssystem in der Schreibweise (4,4)

$$d\underline{x} = \underline{f}(\underline{x};t) + \underline{B}(\underline{x};t)\cdot d\underline{\beta}(t) \tag{2}$$

so resultiert

$$\begin{bmatrix} d\Phi \\ dy_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -KAg(\Phi) - K_d K_1 A_1 g_1(y_1) + a \\ -K_1 A_1 g_1(y_1) + \frac{a}{K_d} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} -K\sqrt{\frac{N_0(\Phi)}{2}} & -K_d K_1 \sqrt{\frac{N_1(y_1)}{2}} \\ 0 & -K_1 \sqrt{\frac{N_1(y_1)}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\beta \\ d\beta_1 \end{bmatrix}$$

Die Notation entspricht derjenigen von Abschnitt 6.2.Mit Hilfe von Gl.(4,21) findet man

$$\begin{aligned} K_0(\Phi,y_1) &= -KA\,g(\Phi) - K_d K_1 A_1 g_1(y_1) + a \\ K_1(\Phi,y_1) &= -KA_1\, g_1(y_1) + \frac{a}{K_d} \end{aligned} \tag{4}$$

und

$$K_{kij}(\Phi,y_1) = \begin{bmatrix} K^2 \cdot \frac{N_0(\Phi)}{2} + K_d^2 \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} & K_d \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \\ K_d \cdot K_1^2 \frac{N_1(y_1)}{2} & K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \end{bmatrix}_{K,j} \tag{5}$$

Damit lautet die F-P Gleichung des gekoppelten Systems

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t}(\Phi,y_1;t) = -\frac{\partial}{\partial \Phi} \Big\{ \Big[& -K_d K_1 A_1 g_1(y_1) - KA g(\Phi) + a \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(K^2 \cdot \frac{N_0(\Phi)}{2} + K_d^2 \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(K_d \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \right) \Big] \cdot p(\Phi,y_1;t) \Big\} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} - \frac{\partial}{\partial y_1} \Big\{ \Big[& -K_1 A_1 g_1(y_1) + \frac{a}{K_d} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_1} \left(K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \right) \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(K_d \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1(y_1)}{2} \right) \Big] p(\Phi,y_1;t) \end{aligned}$$

Eine exakte Lösung dieser partiellen Differentialgleichung ist im allgemeinen nur mit numerischem Methoden möglich.Um mit der Analyse weiterfahren zu können,machen wir einige vereinfachende Annahmen.

7.3. DIE F-P GLEICHUNG FUER DAS TEILWEISE LINEARISIERTE SYSTEM

Von besonderem Interesse ist das Verhalten des PMS,unter der Annahme, dass sich das Grobmass-System im 'In-Lock'-Bereich befindet.Bei einem richtig dimensionierten System ist die Ausfallswahrscheinlichkeit des CMS minimalisiert

$$E(\vartheta_L)_{y_1} \gg E(\vartheta_L)_{\Phi} \tag{7}$$

Approximiert man $g_1(y_1)$ durch eine Gerade

$$g_1(y_1) = \frac{K_{y1}}{A_1} \cdot y_1 \qquad (8)$$

$$K_{y1} = \frac{A}{\Phi_N}$$

dann existiert (Abs.6.3) eine stationäre Verteilung $p(y_1)$ im Intervall $[-\infty, \infty]$ .Um mit der Analyse weiterfahren zu können,ersetzen wir ebenfalls die von y_1 abhängige Leistungsdichte $N_1(y_1)$ (Gl.6,5) durch eine Konstante N_1.Diese Annahme ist umso besser erfüllt,je grösser der Anteil des Fremdrauschens ist.Die Konstante N_1 ist durch die Bedingung bestimmt,dass die Streuung im linearen- und nichtlinearen Modell gleich gross sein soll.

$$\frac{N_{y1}}{2} \triangleq \frac{A_1^2}{2 \cdot B_L} \cdot \frac{\sigma_{y1}^2}{\Phi_N^2} \qquad (9)$$

Wir betrachten im folgenden den in Fig.7-2 skizzierten ,zweidimensionalen Erneuerungsprozess .

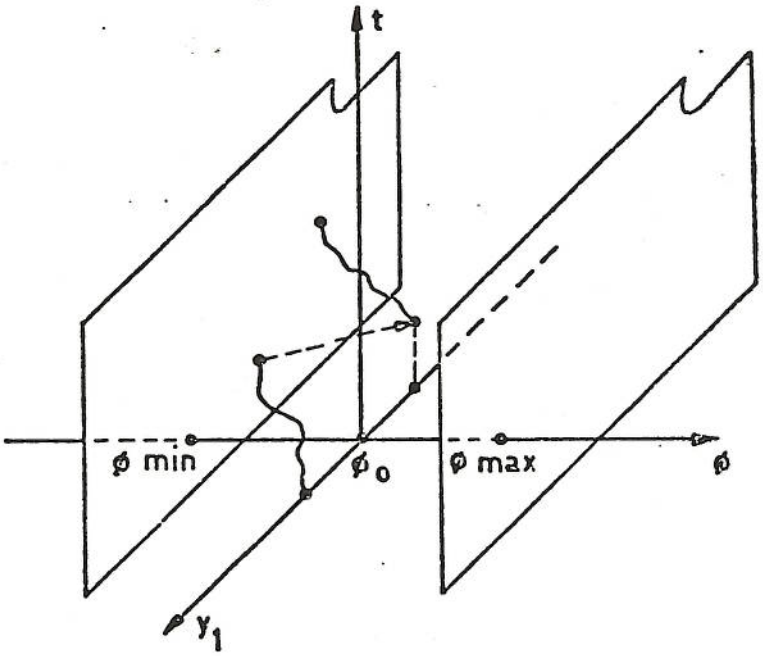


Fig. 7-2. Erneuerungsprozess des gekoppelten Systems

Sobald die Trajektorien eine der Ebenen $\phi=\phi_{min}, \phi_{max}$ erreicht haben, werden sie gestoppt.Unmittelbar danach wird ein neuer Prozess mit der Anfangsverteilung $q(y_1/\phi;t=0) \cdot \delta(\phi-\phi_0)$ gestartet.Für die F-P Gleichung diese Erneuerungsprozesses findet man dann

$$\frac{q(\Phi, y_1; t=0)}{E(\gamma_L)} = \frac{\partial}{\partial \Phi}\left\{\left[-K_d \cdot K_1 \cdot K_{y_1} \cdot y_1 - k \cdot A \cdot g(\Phi) + a \right.\right. \quad *$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(K^2 \cdot \frac{N_0(\Phi)}{2} + K_d^2 \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1}{2}\right)$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(K_d \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1}{2}\right)\cdot\right] \cdot p(\Phi, y_1)\right\} \qquad (11)$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\left[-K_1 K_{y_1} y_1 + \frac{a}{K_d}\right.\right.$$
$$- \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_1}\left(K_1^2 \cdot \frac{N_1}{2}\right)$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \Phi}\left(K_d \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1}{2}\right)\right] \cdot p(\Phi, y_1)\right\}$$

mit den Randbedingungen (5,32),(5,33)

$$K_1(\Phi, y_1) \cdot p(\Phi, y_1)\Big|_{y_1 = \pm\infty} = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial y_1}\left(K_{1,1}(\Phi, y_1) \cdot p(\Phi, y_1)\right)\Big|_{y_1 = \pm\infty} = 0 \qquad (12a)$$
$$p(\Phi, y_1)\Big|_{\Phi = \Phi_{min}} = p(\Phi, y_1)\Big|_{\Phi = \Phi_{max}} \qquad (12b)$$

Durch Integration über y_1 findet man mit Hilfe dieser Randbedingungen

$$\frac{\delta(\Phi - \Phi_s)}{E(\gamma_L)} = \frac{d}{d\Phi}\left[K_0(\Phi) \cdot p(\Phi)\right] - \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\Phi^2}\left[K_{00}(\Phi) \cdot p(\Phi)\right] \qquad (13)$$

mit

$$K_0(\Phi) = -k \cdot A \cdot g(\Phi) - K_d \cdot K_1 \cdot K_{y_1} \cdot E(y_1/\Phi) + a$$
$$K_{00}(\Phi) = K^2 \cdot \frac{N_0(\Phi)}{2} + K_d^2 \cdot K_1^2 \cdot \frac{N_1}{2} \qquad (14)$$

* Da $S(\Phi)$ immer im Operator L absorbiert werden kann; wurde $S(\Phi) = 1$ gesetzt

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet (6,62)

$$p(\Phi) = \frac{2\alpha_T}{E(\tau_L)} \cdot \frac{1}{K_{o,o}(\Phi)} \cdot \exp\left[-L_o(\Phi)\right] \int_{\Phi_{min}}^{\Phi} \left[D_o - \sigma(\nu-\Phi)\right] \exp\left[L_o(\nu)\right] d\nu \qquad (15)$$

Die Funktion $p(\Phi)$ hängt vom bedingten Erwartungswert $E(y_1/\Phi)$ ab, zu dessen Bestimmung man die zweidimensionale Dichtefunktion $p(y_1,\Phi)$ kennen müsste. $E(y_1/\Phi)$ muss deshalb durch Computersimulation oder Approximation gefunden werden. Im Appendix dieses Kapitels wird gezeigt, dass man $E(y_1/\Phi)$ durch den Ausdruck

$$K_d \cdot E(y_1/\Phi) = \Phi - \frac{K \cdot A}{\sigma_g^2} \cdot \frac{S_{g,g}(0)}{2} \cdot g(\Phi) + a \cdot \alpha_{T1} \qquad (16)$$

approximieren kann. Darin bedeuten

$$\frac{S_{g,g}(0)}{2} \triangleq \int_0^\infty E\left\{g\left[\Phi(t+\tau)\right] \cdot g\left[\Phi(t)\right]\right\} \cdot d\tau = \int_0^\infty R_{g,g}(\tau) \cdot d\tau \qquad (17)$$

$$\sigma_g^2 \triangleq E\left[g^2(\Phi)\right] \quad ; \quad \alpha_{T1} = \frac{1}{K_1 \cdot K_{y1}}$$

Für den Quotienten $S_{g,g}(0)/2\cdot\sigma_g^2$ findet man durch Linearisierung des ganzen System

$$\frac{\hat{S}_{g,g}(0)}{2\cdot\sigma_g^2} = \frac{\alpha_T}{1 + \frac{\alpha_T}{\left[\alpha_T + \alpha_{T1}\right] \cdot \left[1 + \frac{\rho_{n1} \cdot \alpha_{T1}}{\rho_n \cdot \alpha_T} \cdot \frac{1}{K_d}\right]}} \qquad (18)$$

ρ_{n1}: SNR im Grobmess-System
ρ_n: SNR im Feinmess-System

7.4. DIE DICHTEFUNKTION IN DER NORMIERTEN VARIABELN $X=\phi/\phi_N$

Unter Verwendung der in Abschnitt 6.6 gemachten Definitionen und Entwicklungen, findet man ein zu Gl.(6,71) korrespondierendes Resultat

$$p(x) = \frac{\alpha_T}{E(q_L)} \cdot \frac{1}{\left[\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho_s}\bar{N}(x) + \frac{\alpha_T \cdot Kd^2}{\alpha_{T1} \cdot \varrho_m}\right]} \cdot \exp\left[-\phi_N \cdot U_0(x)\right] \cdot$$

$$\cdot \int_{x_{min}}^{x} \left[D_0 - \sigma(x'-x_0)\right] \cdot \exp\left[\phi_N \cdot U_0(x')\right] dx' \qquad (19)$$

$$U_0(x) \triangleq -\frac{1}{\phi_N} \cdot \int_{x_{min}}^{x} \frac{\left[\frac{\alpha_T}{\alpha_{T1}} \cdot x' + \left(1 - \frac{S_{g,g}(0)}{2\sigma_g^2 \cdot \alpha_{T1}}\right) \cdot g(x')\right]}{\left[\frac{1}{\varrho_n} + \frac{1}{\varrho_s} \cdot N(x) + \frac{1}{\varrho_m} \frac{\alpha_T}{\alpha_{T1}} Kd^2\right]} \cdot dx'$$

Für ein $\alpha_{T1} \gg \alpha_T$ ist der Schätzwert $\hat{T}_1$ nur noch mit einer sehr kleinen Streuung behaftet und die Dichtefunktion sollte nur noch durch das statistische Verhalten des PMS bestimmt sein. Tatsächlich zeigt (19) dieses asymptotische Verhalten.

APPENDIX : APPROXIMATION VON $E(y_1/\Phi)$

Die im folgenden beschriebene Methode kann keinen Anspruch auf mathematische Exaktheit erheben. Die Resultate stimmen aber gut mit experimentellen Untersuchungen überein, sodass sich eine Anwendung rechtfertigen lässt. Die Methode wurde von Viterbi [26, S.110] vorgeschlagen. Man vergleiche aber auch [15, chap.11]

19)

Gleichung (1) kann in der Form

$$d\Phi = -KAg(\Phi)\,dt + K_d\,dy_1 - K\sqrt{\frac{N_0(\Phi)}{2}}\,d\beta \qquad (1)$$

geschrieben werden. Wir integrieren diese Gleichung

$$\Phi(t+\tau) - \Phi(t) = -\int_t^{t+\tau} K\,A\,g[\Phi(t')]\,dt' + K_d\left[y_1(t+\tau) - y_1(t)\right] + K\int_t^{t+\tau}\sqrt{\frac{N_0(\Phi)}{2}}\,d\beta \qquad (2)$$

Das erste Integral ist ein Riemann Integral im Mittel (m.s.sense), das zweite ein Itô Integral. Wir bilden den bedingten Erwartungswert, bedingt bezüglich $\Phi(t)$,

$$\begin{aligned} &E\left[\Phi(t+\tau)/\Phi(t)\right] - E\left[\Phi(t)/\Phi(t)\right] \\ &= -\int_t^{t+\tau} KA\cdot E\left\{g\left[\Phi(t')\right]/\Phi(t)\right\}dt' + K_d\left\{E\left[y_1(t+\tau)/\Phi(t)\right] - E\left[y_1(t)/\Phi(t)\right]\right\} \\ &\quad + K\cdot E\left\{\int_t^{t+\tau}\sqrt{\frac{N_0[\Phi(t')]}{2}}\,d\beta(t')/\Phi(t)\right\} \end{aligned} \qquad (3)$$

Befindet sich das System zur Zeit t im stationären Zustand und lassen wir $\tau \to \infty$ streben, dann resultiert aus (3)

$$K_d\cdot E\left[y_1(t)/\Phi(t)\right] = \Phi - E(\Phi) - KA\cdot\int_t^{t+\tau} E\left\{g\left[\Phi(t')\right]/\Phi(t)\right\}dt' + K_d\cdot E(y_1) \qquad (4)$$

Dabei haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass für genügend grosse τ und stationäre Prozesse gilt

$$\lim_{\tau\to\infty} E[\phi(t+\tau)/\phi(t)] = E(\phi)$$

$$\lim_{\tau\to\infty} E[y_1(t+\tau)/\phi(t)] = E(y_1) \qquad (5)$$

Wir nehmen an, dass der letzte Summand von (3) verschwindet.Dies ist sicher dann der Fall,wenn $N(\phi)$ konstant ist.

$$E(y_1) = \frac{a}{K_d} \cdot \frac{1}{K_1 \cdot K_{y_1}} \qquad (6)$$

Die Mittelwerte $E(\phi)$ und $E(g(\phi))$ sind für ein symmetrisches Intervall $[-\phi_{max}, \phi_{max}]$ gleich Null.Es bleibt noch der Erwartungswert $E(g(\phi(t'))/\phi(t))$ zu bestimmen.

Wir schätzen diesen Erwartungswert durch

$$\hat{E}\{g[\phi(t+\tau)]/\phi(t)\} = S(\tau) \cdot g[\phi(t)] \qquad (7)$$

ab.Die Funktion $S(\tau)$ bestimmen wir so,dass der kleinste quadratische Fehler resultiert

$$E_{\phi(t+\tau)}\left\{\left[E[g(\phi(t+\tau))/\phi(t)] - S(\tau)\cdot g(\phi(t))\right]^2\right\} \Rightarrow Min \qquad (8)$$

Mit Hilfe des Orthogonalitätsprinzips [9,S.217] findet man nach einigen Rechnungen [15,S.539]

$$S(\tau) = \frac{R_{g,g}(\tau)}{\sigma_g^2} \qquad (9)$$

mit

$$R_{g,s}(\tau) \triangleq E\left\{ g[\Phi(t+\tau)] \cdot s[\Phi(t)] \right\}$$
$$\sigma_g^2 \triangleq E[g^2(\Phi)] \qquad (10)$$

Daraus

$$\lim_{\tau\to\infty} \int_t^{t+\tau} E\left\{ g[\Phi(t')] / \Phi(t) \right\} dt' = \frac{g(\Phi)}{\sigma_g^2} \cdot \frac{S_{g,g}(0)}{2} \qquad (11)$$

$$S_{g,s}(0) \triangleq \int_0^\infty R_{g,s}(\tau)\, d\tau$$

Damit schlussendlich

$$K_d \cdot E(y_1/\Phi) = \Phi - \frac{K \cdot A \cdot S_{g,g}(0)}{2 \cdot \sigma_g^2} \cdot g(\Phi) + \frac{a}{K_1 \cdot K_{y_1}} \qquad (12)$$

8. GESCHWINDIGKEITSMESSUNG MIT KORRELATIONSVERFAHREN

8.1. ALLGEMEINES

Das Messprinzip wurde in Abs.1.1. erläutert.Die hohen Genauigkeitsanforderungen erfordern eine eingehende Analyse des ganzen Systems.Wir beschränken uns hier auf die Signalverarbeitung;der mechanische,optische und elektronische Aufbau sind nicht Gegenstand dieser Arbeit. Man vergleiche diesbezüglich z.B. [8] .

8.2. SYSTEMATISCHE FEHLER DES KORRELATIONSRECHNERS

Eigenschaften der Signale

Die Intensität des empfangenen Lichtes ist eine Funktion der Oberfläche am betrachteten Ort.Man definiert daher eine räumliche Korrelation,wobei man annehmen darf,dass diese Funktion nur vom Abstand d der Punkte abhängt.Die Gestalt dieser Funktion hängt von der Oberflächenbeschaffenheit und der Optik ab [8] .Den Zusammenhang zwischen räumlicher und zeitlicher Korrelation findet man durch Ersetzen von $\emptyset$ durch d/v

$$R_{x,x}(d) \longrightarrow R_{x,x}(\emptyset = d/v) \qquad (1)$$

räumliche Korrelation zeitliche Korrelation

Die Breite der Korrelationsfunktion $R_{x,x}(\emptyset)$ ist somit indirekt proportional zur Geschwindigkeit.In allen bisherigen Rechnungen wurde angenommen,dass $g(\emptyset)$ nicht von T abhängt.Es ist möglich,die Abhängigkeit (1) in den F-P Gleichungen zu berücksichtigen,doch führt dies zu einer erheblichen mathematischen Komplizierung.Sofern man diese Abhängigkeit vernachlässigt,entspricht $x_o \neq 0$ dem Fall,wo bei konstanter Translationsgeschwindigkeit v eine Spannung $u_{AC}(t)$ eine Beschleunigung vortäuscht.Durch konstanthalten von $g(\emptyset)$ innerhalb eines Intervalls T_{min}, T_{max} erhalten wir eine untere und obere Grenze für die interessierenden Grössen.

Bei den Störsignalen muss zwischen solchen unterschieden werden die mit dem Nutzsignal korreliert sind,und solchen die unkorreliert sind.Korrelierte Störsignale entstehen beispielsweise durch einen AGC mit zu kleiner Zeitkonstante,durch Schwankungen der Entfernung von Messkopf und Oberfläche oder durch Intensitätsschwankungen der Quelle. Als korreliertes Störsignal wirkt sich ferner ein Uebersprechen der beiden Signalpfade aus.Mit korrelierten Störsignalen erhalten wir

anstelle von Gl. (3,10)

$$E(z) = A_1 A_2 \int_{-\infty}^{\infty}\int h_1(t-\nu)\, h_2(t-\xi)\cdot\left[R_{x,x}(\cdots)+R_{x,n_1}(\cdots)+R_{x,n_2}(\cdots)+R_{n_1,n_2}(\cdots)\right] \cdot d\nu\, d\xi \qquad (2)$$

Die drei letzten Summanden in der eckigen Klammer verursachen einen systematischen Fehler, da $E(z) \neq 0$ für $\phi=0$, und müssen durch geeignete Systemauslegung möglichst vermieden werden. Für unkorrelierte Störsignale verschwinden sie, die Rauschprozesse wirken sich nur noch in einer Vergrösserung der Streuung aus.

Laufzeitfehler

Sofern die dynamischen Eigenschaften der beiden Signalpfade nicht übereinstimmen, entsteht ebenfalls ein systematischer Messfehler. Man kann dies immer auf den Fall zurückführen, wo die beiden Filter $h_1(t), h_2(t)$ die Bedingung (2,9) zur Erzeugung der ungeraden Korrelationsfunktion nicht erfüllen. In diesem Falle ist $E(z) \neq 0$ für $\phi=0$

Einstellen auf falsche Nullstellen.

Krasse systematische Fehler entstehen, wenn sich der Regelkreis auf eine Nebennullstelle einstellt. Solche Nebennullstellen entstehen entweder durch periodische Komponenten in den Störsignalen oder wenn $S_{x,x}(\omega)$ Bandpasscharakteristik hat. Zur Detektion solcher Fehler muss eine spezielle Ueberwachungsschaltung vorhanden sein, die im Prinzip die gerade Korrelationsfunktion misst (Fig. 5 - 2).

8.3. DIE STREUUNG σ^2_ϕ

Die Streuung σ^2_ϕ ist im Tracking-Modus wohl die wichtigste Kenngrösse. Die genaue Abhängigkeit von den verschiedenen Parametern ist kompliziert. Unter gewissen Annahmen lassen sich aber einfache Näherungsformeln herleiten, die den prinzipiellen Einfluss der verschiedenen Grössen richtig darstellen.

Fall 1: Hohe Geschwindigkeit

Unter den Annahmen

$$a = 0 \quad ; \quad \varrho_s \gg \varrho_n \qquad (3)$$

erhalten wir für $p(x)$ angenähert eine Gaussverteilung mit der Streuung

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{S_n} = \frac{2 \cdot B_L \cdot N}{A^2 \cdot 2} = \frac{N}{4 \cdot A^2 \cdot \alpha_T} \qquad (4)$$

Durch Multiplikation mit ϕ^2_N erhält man die Streuung der dimensionsbehafteten Variablen ϕ. Für den relativen Fehler findet man

$$\frac{\sigma_\phi}{T} = \frac{\sigma_v}{V} = \frac{d_{korr}}{L} \cdot \sqrt{\frac{N}{4 \cdot A^2 \cdot \alpha_T}} \qquad (5)$$

d_{korr} ist ein Mass für die Korrelationslänge der Oberfläche.

$$d_{korr} \triangleq \int_0^\infty R_{xx}(s)\, ds \qquad [m] \qquad (6)$$

$$d_{korr} \cong \phi_N \cdot V$$

Punkte, die mehr als d_{korr} voneinander entfernt sind, sind praktisch statistisch unabhängig. Nach Formel (5) sinkt der relative Fehler mit wachsendem Abstand L der Messpunkte (dafür wird das System beschleunigungsempfindlicher). Eine Verkleinerung von d_{korr}, oder anders ausgedrückt eine Vergrösserung der räumlichen Bandbreite, bewirkt ebenfalls eine lineare Verbesserung des relativen Fehlers. Den gleichen Effekt erzielt man durch eine Vergrösserung der Zeitkonstanten α_T, allerdings wirkt sich $1/\alpha_T$ nur mit der Quadratwurzel aus. Interessant ist, dass der relative Fehler unabhängig von der Geschwindigkeit ist.

Fall 2: Tiefe Geschwindigkeit

Wir machen die Annahmen

$$a = 0 \quad ; \quad S_s \ll S_n \qquad (7)$$

Mit Hilfe der Gleichungen (3,23), (3,24), (3,25) zeigt man, dass der Quotient (8) proportional zu ϕ_N ist.

$$\frac{N(\phi)}{2 \cdot A^2} \sim \phi_N \cdot \frac{N}{2} \qquad (8)$$

N/2 sei ein passend gewählter Mittelwert der Funktion $\bar{N}(x)/2$. Wir machen wieder die Annahme, dass p(x) ungefähr gaussverteilt sei und erhalten

$$\sigma_x^2 \sim \frac{B_L \cdot \Phi_N \cdot N}{2} \qquad (9)$$

Für den relativen Fehler σ_ϕ / T findet man, unter Zuhilfenahme von (6),

$$\frac{\sigma_\phi}{T} \sim \sqrt{\frac{N}{4 \cdot \alpha_T}} \cdot \left(\frac{d_{korr}}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{T} \qquad (10)$$

Vergleicht man mit (5), so sieht man, dass der Quotient d_{korr}/L nur in der 3/2 Potenz vorkommt. Wohl der wichtigste Unterschied zu Fall 1 besteht aber in der Abhängigkeit des relativen Fehlers von T oder L/v.

Es wurde schon betont, dass die Formeln (10) und (5) nur den qualitativen Einfluss der Parameter richtig beschreiben. Für numerische Resultate muss man auf die Ergebnisse der exakten Theorie zurückgreifen. Zur Illustration ist in Fig. 8-1 σ_x in Funktion von ϱ_s aufgetragen. Die Streuung σ_x ist proportional zum relativen Fehler, ϱ_s ist direkt proportional zur Geschwindigkeit v.

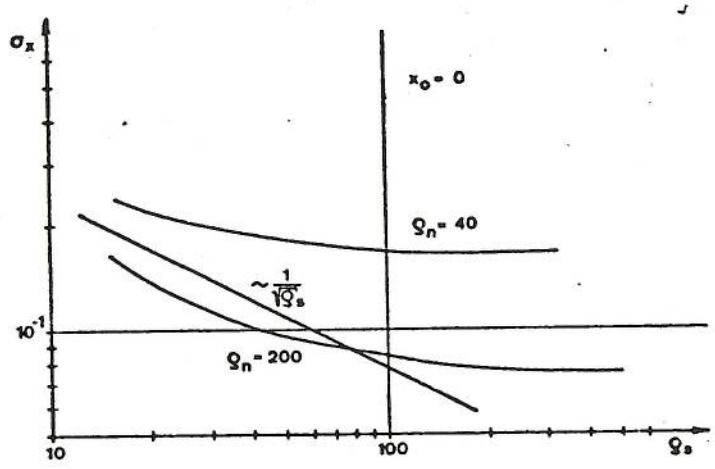


Fig. 8-1. σ_x in Funktion von ϱ_s für den digitalen DLL mit dreieckiger Nichtlinearität

Für $\varrho_n = 200$ ist für kleine ϱ_s praktisch nur das Eigenrauschen massgebend (Fall 2) und die Kurve verläuft ungefähr wie $1/\sqrt{v}$ während

für $\varrho_n = 40$ die Abnahme in Funktion von ϱ_s schwächer ist (Fall 1).

8.4. WEGMESSUNG

Der zurückgelegte Weg kann durch Integration der Geschwindigkeit erhalten werden.

$$\hat{s}(t_{mess}) = \int_0^{t_{mess}} \frac{L}{T(t)-\Phi(t)}\,dt \cong \int_0^{t_{mess}} \left[\frac{L}{T(t)} + \frac{L}{T(t)^2}\cdot\Phi(t)\right]dt \qquad (11)$$

Der Mittelwert der stochastischen Variabeln $\hat{s}(t)$ ist

$$E\left[\hat{s}(t_{mess})\right] = \int_0^{t_{mess}} \frac{L}{T(t)}\,dt + \int_0^{t_{mess}} \frac{L}{T^2(t)}\cdot E[\Phi t]\,dt \qquad (12)$$

Um systematische Fehler zu vermeiden, muss darauf geachtet werden, dass $E(\phi(t))$ verschwindet. Zur approximativen Berechnung der Streuung $\sigma^2_{\hat{s}}$ nehmen wir T= konstant an. Es gilt dann

$$\sigma^2_{\hat{s}}(t_{mess}) = \left(\frac{L}{T^2}\right)^2 \cdot t_{mess} \int_0^{t_{mess}} \left[1 - \frac{\tau}{t_{mess}}\right]\cdot R_{\Phi,\Phi}(\tau)\,d\tau \qquad (13)$$

Für $R_{\phi,\phi}(\tau)$ nehmen wir an

$$R_{\Phi,\Phi}(\tau) \cong \sigma^2_{\Phi}\cdot \exp\left[-1/\alpha_T \cdot \tau\right] \qquad (14)$$

und erhalten, falls die Messzeit viel länger als α_T ist,

$$\frac{\sigma_{\hat{s}}}{s} \cong \sqrt{\frac{v}{s}\cdot\alpha_T}\cdot\left(\frac{\sigma_\Phi}{T}\right) \qquad (15)$$

Nehmen wir zusätzlich an $\varrho_s \gg \varrho_n$ dann gilt

$$\frac{\sigma_{\hat{s}}}{s} \cong \sqrt{\frac{v}{s}\cdot\frac{N}{4A^2}}\cdot\left(\frac{d_{korr}}{L}\right) \qquad (16)$$

Bemerkenswert ist,dass der relative Fehler in dieser Näherung unabhängig von der Zeitkonstanten α_T ist und mit $1/\sqrt{s}$ abnimmt.

Die relative Abweichung des Mittelwertes (1-E(s)/s) von der Referenzlänge s ist in Fig.8-2 dargestellt.Die Messungen wurden mit einem in der Firma Hasler AG,Bern, gebauten Gerät gemacht.Für jeden Messpunkt wurden rund 20 Messungen durchgeführt.

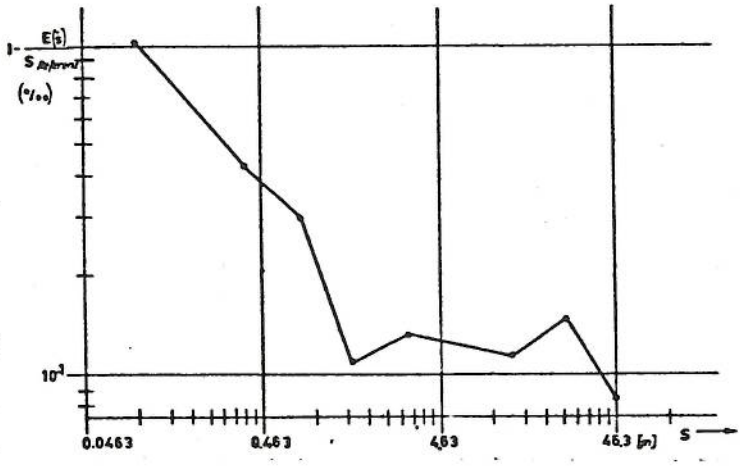


Fig. 8-2. Relative Abweichung des Mittelwertes von der Referenzlänge

Die relative Streuung σ_s/s in Funktion der Länge s zeigt ungefähr das in (16) beschriebene Verhalten $1/\sqrt{s}$.

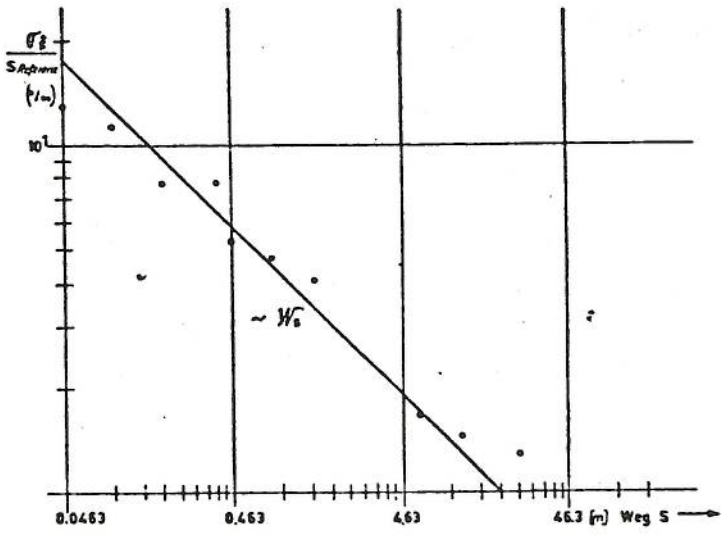


Fig. 8-3. Relative Streuung in Funktion der Referenzlänge

8.5. UNTERE GESCHWINDIGKEITSGRENZE

Von einer unteren Geschwindigkeitsgrenze zu reden ist nicht ganz korrekt, da das System beliebig kleine,aber konstante Geschwindigkeiten messen kann.Dazu muss die Zeitkonstante α_T entsprechend gross und damit verbunden,die Messzeit ebenfalls gross gewählt werden.Sobald man aber variable Geschwindigkeiten messen will,tritt eine untere Grenze auf. Notwendig für eine stabile Gleichgewichtslage ist (6,3)

$$|a| < kA = \frac{d_{korr}}{\alpha_T \cdot v} \;;\; |a| = \frac{L}{v^2}\left|\frac{dv}{dt}\right| \qquad (17)$$

$$\Rightarrow \left|\frac{dv}{dt}\right| < \frac{d_{korr} \cdot v}{\alpha_T \cdot L}$$

Die Beschleunigungsfähigkeit ist indirekt proportional zur Zeitkonstanten α_T und zu L, während die zulässige Beschleunigung mit v sinkt. Zwischen den Anforderungen der Genauigkeit (5),(10),und derjenigen einer grossen Dynamik (17),bestehen offensichtlich Widersprüche.

Die Ungleichung (17) ist eine notwendige,aber nicht hinreichende,Bedingung für eine stabile Gleichgewichtslage.Die WSK eines Ausfalls im Zeitintervall [0,t] ist nach Gl.(6,83) gegeben durch

$$P(t) \cong 1 - \exp\left[-\frac{\alpha_T}{E(\tau_L)} \cdot \frac{t}{\alpha_T}\right] \qquad (18)$$

Durch Berechnung von $E(\tau_L)/\alpha_T$ in Funktion des Parametertupels (v,dv/dt) lässt sich P(t) berechnen.Eine untere Geschwindigkeitsgrenze lässt sich durch ein maximal zulässiges P(t) definieren.In Fig.8-4.ist $E(\tau_L)/\alpha_T$ in Funktion von ϱ_s aufgetragen.

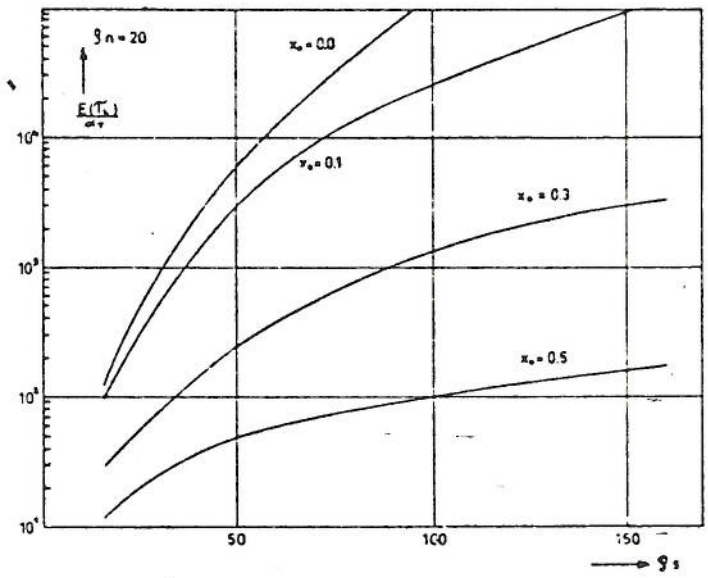


Fig. 8-4 $E(\tau_L)/\alpha_T$ in Funktion von ϱ_s

Verändert man in x_0 und ϱ_s nur α_T, so findet man für jedes Wertepaar $(v, dv/dt)$ ein α_T für welches $E(\tau_L)$ maximal ist. Daraus lässt sich das optimale Steuergesetz der Verzögerungsleitung

$$\frac{d\hat{T}}{dt} = K(\hat{T}) \cdot u_s(t) \quad ; \quad \hat{T} = \frac{L}{v} \cdot \tag{19}$$

bestimmen.

8.6. SYSTEMAUFBAU

Um die widersprüchlichen Anforderungen bezüglich Genauigkeit und Dynamik erfüllen zu können, benützt man zwei gekoppelte Systeme erster Ordnung. Im Grobmess-System (CMS) wird die Geschwindigkeit auf einige Prozent genau bestimmt. Dieser Schätzwert wird einem Präzisions-System (PMS) als Sollgrösse eingegeben. Der Abstand der Lichtquellen L im Grob-System ist viel kleiner als im Feinmess-System, dadurch sinkt wohl die Genauigkeit (5), (10), dafür hat das System eine bessere Dynamik (17). Das Feinmess-System hat dann im wesentlichen die Aufgabe, die kleinen Abweichungen im Mittel zu korrigieren. Eine eingehende Analyse wurde in Kap.7 gegeben.

Da die Breite der Korrelationsfunktion indirekt proportional zur Geschwindigkeit ist, muss der Verstärkungsfaktor K in (19) von v abhängig sein. Die Wahl der Nichtlinearität $K(\hat{T})$ hängt vom gewählten Optimierungskriterium, der Dynamik dT/dt und vom zulässigen Hardwareaufwand ab.

Zwei der Hauptprobleme bei der Verwendung eines Korrelationsverfahrens sind

1. Das Auffinden (Acquisition) eines genügend genauen Schätzwertes $\hat{T}$ in der Umgebung $\phi=0$
2. Die Ueberwachung des 'In-Lock'Zustandes

Ein Grossteil des Hardware Aufwandes geht zu Lasten dieser zwei Funktionen. Das Auffinden einer Näherung kann durch 'sweepen' des CMS gelöst werden. Zur Funktionsüberwachung misst man die gerade Korrelationsfunktion (Fig.5-2).

8.7. BERECHNUNG DER PARAMETER FUER DEN DIGITALEN DLL

In der folgenden Tabelle sind die notwendigen Relationen zwischen den geometrischen und kinematischen Parametern und den in Kap.6 verwendeten Grössen zusammengestellt. Die mit * markierten Beziehungen gelten nur für den Spezialfall einer dreieckigen Nichtlinearität und sind für andere Fälle, gemäss den Definitionen, geeignet zu modifizieren.

$T = L/v$

$f_p = Z_s \cdot 1/T$; Z_s: Anzahl Schieberegisterstufen in der Verzögerungleitung

$\Phi_N = 1/f_p$ *

$x_o = \Phi/\Phi_N = a \cdot \alpha_T/\Phi_N$

$a = -L/v^2 \cdot dv/dt$

$A_1 = A_2$ $A_1 \cdot A_2 / A = 1$ *

$K_\Phi = A/\Phi_N$

$K = 1/\alpha_T \cdot 1/K_\Phi$

Tabelle 1

Die Verstärkung K ist geschwindigkeitsabhängig.(α_T ist eine Funktion von T).

9. ERNEUERUNGSPROZESSE UND IHRE ANWENDUNG AUF TRACKING SYSTEME MIT PERIODISCHER NICHTLINEARITAET

9.1. EINFUEHRUNG

Bis anhin wurde die stationäre Dichtefunktion $p(\underline{y})$ des PLL mit Hilfe der sogenannten 'Periodic Extension' [15,chapt.9] ermittelt. Zur Bestimmung der mittleren Zyklenzeit $E(\mathcal{T}_L)$ musste die F-P Gleichung mit anderen Randbedingungen gelöst werden. (Mean time to first passage problem). Die Grössen N_+, N_- konnten nur näherungsweise bestimmt werden. Allgemein war nicht klar, wie die PE-Lösung aus der zeitabhängigen Lösung $q(\underline{y};t)$ hervorgeht.

Im Gegensatz dazu findet man durch Lösen der F-P Gleichung des Erneuerungsprozesses sowohl die stationäre Dichtefunktion wie auch $E(\mathcal{T}_L)$ und $N_{\pm}$. Die Theorie gilt für beliebige Nichtlinearitäten und Filter $F(p)$.

Es wird sich zeigen, dass die stationäre Dichtefunktion des Erneuerungsprozesses des PLL erster Ordnung mit der PE-Lösung übereinstimmt. Für Systeme n-ter Ordnung gilt dies nur, wenn die $E(y_k/\phi)$ die Periode 2π haben. Im andern Falle entspricht die PE-Lösung nicht der stationären Dichtefunktion des PLL n-ter Ordnung.

9.2. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND AEQUIVALENTES MODELL

Die Differentialgleichung des PLL lautet [15,chapt.11]

$$\frac{d\phi}{dt} = -KF(p)\cdot\left[Ag(\phi)+n(t)\right] + \frac{d\Theta}{dt} \qquad (1)$$

Das äquivalente Modell zeigt Fig.9-1

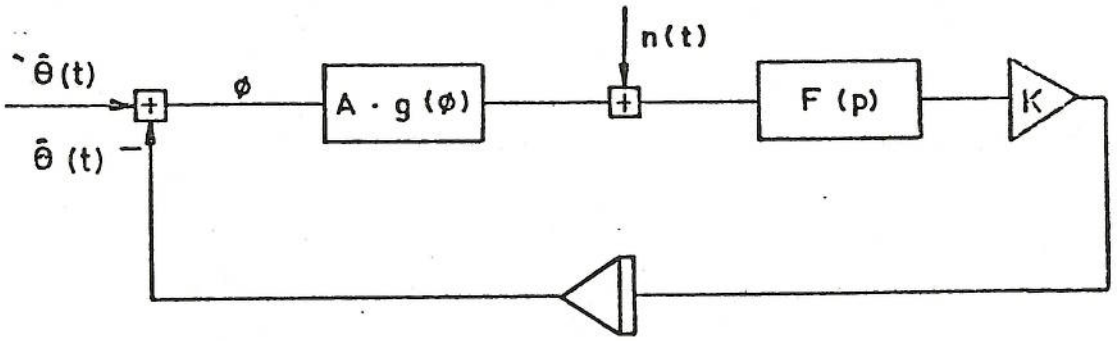


Fig. 9-1. Aequivalentes Modell des PLL

Schreibt man die Uebertragungsfunktion F(p) in Partialbruchzerlegung

$$F(p) = F_0 + \sum_{K=1}^{N} \frac{1 - F_K}{1 - \tau_K \cdot p} \qquad (2)$$

so erhält man F(p)=1 für $F_0=1$ und $F_k=1, k=1,..N$. Für N=1 und $F_0=F_1=\tau_2/\tau_1$ erhält man das in der Praxis am häufigsten verwendete Filter vom Proportional-Integraltyp. Setzen wir (2) in (1) ein und nehmen an

$$\Theta(t) = \Omega_0 \cdot t + \Theta_0 \qquad (3)$$

so können wir (1) durch ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung ersetzen.

$$\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dt} &= \frac{d\phi}{dt} = \Omega_0 - F_0 \cdot K \left[A g(\phi) + n(t) \right] + \sum_{k=1}^{N} y_k \\
\frac{dy_1}{dt} &= -\frac{y_1}{\tau_1} - \frac{(1-F_1) \cdot K \cdot [A \cdot g(\phi) + n(t)]}{\tau_1} \\
&\vdots \\
\frac{dy_N}{dt} &= -\frac{y_N}{\tau_N} - \frac{(1-F_N) \cdot K \cdot [A \cdot g(\phi) + n(t)]}{\tau_N}
\end{aligned} \qquad (4)$$

Es ist klar, dass die y_k die Komponenten eines (N+1)-dimensionalen Vektor-Markovprozesses sind, falls n(t) ein weisser, gauss'scher Rauschprozess ist. (Kap.4). Aus Gl.(4) findet man mit Hilfe der in Abs.4.3 hergeleiteten Relationen die korrespondierende F-P Gleichung

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p(\underline{y};t)}{\partial t} = &- \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left[\Omega_0 - F_0 \cdot A K \cdot g(\phi) + \sum_{k=1}^{N} y_k \right] \cdot p(\underline{y};t) \right. \\
&+ \frac{F_0^2 N_0 K^2}{4} \frac{\partial^2 p(\underline{y};t)}{\partial \phi^2} \\
&+ \sum_{K=1}^{N} \left\{ \frac{\partial}{\partial y_K} \left[\frac{y_K}{\tau_K} + \frac{1-F_K}{\tau_K} \cdot AK g(\phi) \right] p(\underline{y};t) \right. \\
&\left. \left. + \left[\frac{(1-F_K)^2 N_0 K^2}{4 \cdot \tau_K^2} \frac{\partial^2}{\partial y_K^2} + \frac{F_0 (1-F_K) N_0 K^2}{2 \tau_K} \frac{\partial^2}{\partial \phi \partial y_K} \right] \cdot p(\underline{y};t) \right\} \right. \\
&+ \sum_{K \neq l \neq 0}^{N} \sum^{N} \frac{(1-F_K)(1-F_l) K^2 N_0}{4 \tau_K \tau_l} \frac{\partial^2}{\partial y_K \partial y_l} p(\underline{y};t)
\end{aligned} \qquad (5)$$

9.3. DIE F-P GLEICHUNG DES ERNEUERUNGSPROZESSES

Für den Prozess mit Rücksprung erhalten wir (5,42)

$$L\, p(\Phi, \underline{y}_0^T) = \frac{q(\Phi \underline{y}_0^T; t=0)}{E(T_L)} \tag{6}$$

mit den Randbedingungen (5,32) und (5,33) sowie

$$p(\Phi_0 - 2\pi, \underline{y}_0^T) = p(\Phi_0 + 2\pi, \underline{y}_0^T) = 0 \tag{7}$$

Man zeigt leicht, dass L periodisch ist mit der Periode 2π. Allgemein kann man daher (6) in irgendeinem Intervall $[\Phi_0 - 2\pi\cdot(1-k); \Phi_0 + 2\pi\cdot(1+k)]$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ formulieren.

Für $q(\Phi, \underline{y}_0^T; t=0)$ können wir schreiben

$$q(\Phi, \underline{y}_0^T; t=0) = q(\underline{y}_0^T; t=0/\Phi; t=0)\cdot\delta(\Phi - \Phi_0) \tag{8}$$

Falls $p(\Phi, \underline{y}_0^T)$ gleich der stationären Verteilung des PLL sein soll so ist $q(\underline{y}_0; t=0/\Phi; t=0)$ nicht mehr frei wählbar. Die Trajektorie springt in einen Punkt der Ebene $\Phi=\Phi_0$ zurück, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Zurückspringen in einen Punkt gleich

$$p(\underline{y}_0 / \Phi = \Phi_0)\cdot dy_1 \cdots dy_N \tag{9}$$

ist. Daher muss gelten

$$q(\underline{y}_0; t=0/\Phi = \Phi_0; t=0) = p(\underline{y}_0^T / \Phi = \Phi_0) \tag{10}$$

Integriert man (6) über alle $y_j \neq y_k$, Φ , so findet man unter Benützung der Randbedingungen (5,32), (5,33)

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\left[J_0(\phi,y_k)\right] + \frac{\partial}{\partial y_k}\left[J_k(\phi,y_k)\right] = \frac{p(y_k/\phi=\phi_0)}{E(T_L)}\cdot\delta(\phi-\phi_0) \qquad (11)$$

mit

$$J_0(\phi,y_k) = \left[K_0(\phi,y_k) - \frac{1}{2}K_{q0}\frac{\partial}{\partial\phi} - \frac{1}{2}K_{k0}\frac{\partial}{\partial y_k}\right]\cdot p(\phi,y_k)$$

$$J_k(\phi,y_k) = \left[K_k(\phi,y_k) - \frac{1}{2}K_{k,k}\frac{\partial}{\partial y_k} - \frac{1}{2}K_{q,k}\frac{\partial}{\partial\phi}\right]\cdot p(\phi,y_k) \qquad (12)$$

und

$$K_0(\phi,y_k) = \Omega_0 - F_0 A K g(\phi) + y_k + \sum_{\ell\neq k+0}^{N} E(y_\ell/\phi,y_k)$$

$$K_k(\phi,y_k) = \frac{1}{T_k}\left[y_k - (1-F_k)\cdot A K\cdot g(\phi)\right] \qquad (13)$$

$$K_{q,k} = \frac{F_0(1-F_k)N_0K^2}{2T_k} - K_{k,0}\ ;\ K_{k,k} = \frac{(1-F_k)^2N_0K^2}{2\cdot T_k^2}\ ;\ K_{0,0} = \frac{N_0F_0^2K^2}{2}$$

Eine weitere Integration über ϕ liefert dann die Randverteilung

$$\frac{\partial}{\partial y_k}J_k(y_k) + J_0(\phi,y_k)\Big|_{\phi_0-2\pi}^{\phi_0+2\pi} = \frac{p(y_k/\phi=\phi_0)}{E(T_L)} \qquad (14)$$

Die Differenz des Stromes $J_0(\phi,y_k)$, genommen an den Rändern $\phi = \phi_0 \pm 2\pi$ verschwindet im allgemeinen nicht. Dies im Gegensatz zur PE-Lösung, wo gilt

$$J_0(-\pi,\underline{y}_0^T) = J_0(\pi,\underline{y}_0^T) \qquad (15)$$

Die Randverteilung $p(\phi)$ findet man durch eine Integration von (11) über y_k.

$$\frac{d}{d\phi}\left[K_0(\phi)\,p(\phi)\right] - \frac{1}{2}\cdot K_{0,0}\,\frac{d^2}{d\phi^2}\,p(\phi) = \frac{\delta(\phi-\phi_0)}{E(T_L)} \qquad (16)$$

mit

$$K_0(\phi) = -\Omega_0 - A\,K\,F_0\,g(\phi) + \sum_{k=1}^{N} E(y_k/\phi) \qquad (17)$$

9.4. ZUSAMMENHANG ZWISCHEN DER DICHTEFUNKTION DES ERNEUERUNGS-PROZESSES UND DERJENIGEN DER PE-LOESUNG

Durch einmalige Integration von Gl.(16) erhalten wir

$$\left[-\Omega_0 - AKg(\phi) + \sum_{k=1}^{N} E(y_k/\phi)\right]\cdot p(\phi) - \frac{N_0 F_0^2\cdot K^2}{4}\cdot\frac{dp(\phi)}{d\phi} = \frac{\sigma(\phi-\phi_0)-D_0}{E(T_L)} \qquad (18)$$

Auf der linken Seite von (18) steht der Wahrscheinlichkeits-Strom $J_0(\phi)$, verursacht durch die Quelle $\delta(\phi-\phi_0)/E(T_L)$. Die Dichtefunktion erstreckt sich über ein Intervall der Länge 4π und verschwindet an den Rändern.

Falls wir nur am Phasenfehler interessiert sind, so genügt es, das Intervall $[-\pi+\phi_0, \pi+\phi_0]$ zu betrachten. Dies entspricht dem Messbereich eines Phasenmeters. Wir definieren die Ereignisse

ε_+ : Die Phase ϕ liegt zwischen $[\phi,\phi+d\phi]$ oder zwischen $[\phi-2\pi, \phi-2\pi+d\phi]$ für $\phi_0 \le \phi \le \phi_0+\pi$

ε_- : Die Phase liegt zwischen $[\phi,\phi+d\phi]$ oder zwischen $[\phi+2\pi, \phi+2\pi+d\phi]$ für $\phi_0-\pi \le \phi \le \phi_0$ (19)

Da die ε_+ (ε_-) definierenden Ereignisse gegenseitig unvereinbar sind, gilt

$$P(\varepsilon_\pm) = d\phi\cdot\left[p(\phi) + p(\phi \mp 2\pi)\right]$$

Wir definieren dann die neue Dichtefunktion

$$p_{R_I}(\Phi) \triangleq p(\Phi) + p(\Phi \mp 2\pi) \tag{20}$$

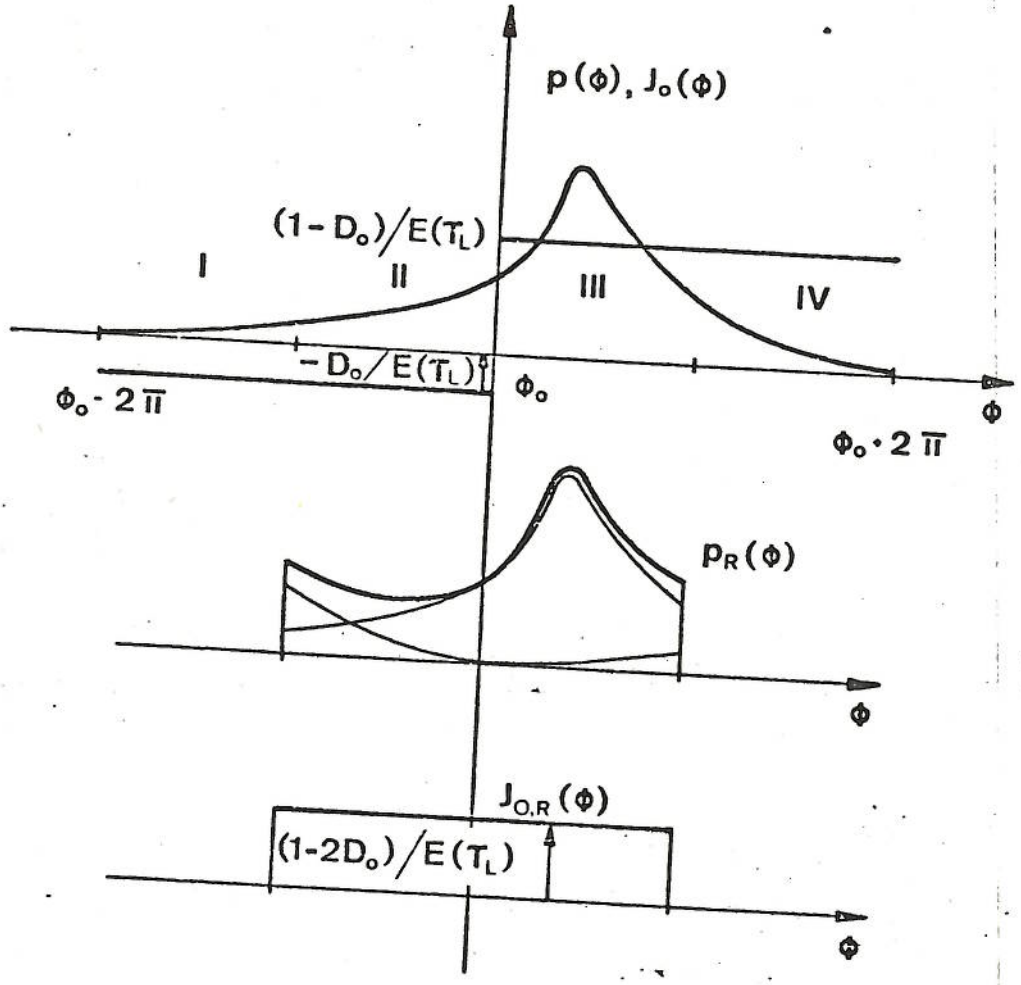


Fig. 9-2. Konstruktion der Dichtefunktion $P_R(\Phi)$

Wir sehen ohne jede Rechnung, dass der Strom $J_{o,R}(\Phi)$ der neuen Verteilung im ganzen Intervall $[\Phi_o - \pi, \Phi_o + \pi]$ konstant und gleich dem Differnzstrom

$$J_{o,R} = \frac{1-2\cdot D_o}{E(T_L)} \tag{21}$$

ist. Die Werte der Funktion $p_R(\Phi)$ an den Stellen $\Phi = \Phi_o \pm \pi$ sind nach Definition

$$p_R(\Phi_o - \pi) = p(\Phi_o - \pi) + p(\Phi_o + \pi)$$
$$p_R(\Phi_o + \pi) = p(\Phi_o + \pi) + p(\Phi_o - \pi)$$

Daraus, und aus (21), folgt

$$p_R(\phi_0-\pi) = p_R(\phi_0+\pi) \tag{22a}$$

$$\frac{d}{d\phi} p_R(\phi_0-\pi) = \frac{d}{d\phi} p_R(\phi_0+\pi) \tag{22b}$$

Die Relation (22a) entspricht den bei der PE Methode verwendeten Randbedingungen. Es bleibt deshalb die Frage offen, wie $p_R(\phi)$ und die PE-Lösung zusammenhängen. Man löst dort die Differentialgleichung

$$\frac{d}{d\phi}\left[K_0(\phi)\cdot p_{PE}(\phi)\right] - \frac{1}{2} K_{0,0}\cdot \frac{d^2}{d\phi^2} p_{PE}(\phi) = 0 \tag{23}$$

mit den Randbedingungen

$$p_{PE}(-\pi) = p_{PE}(\pi) \tag{23a}$$

Die zwei Integrationskonstanten der homogenen Differentialgleichung sind durch (23a) und die Normierungsbedingung

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_{PE}(\phi)\, d\phi = 1$$

bestimmt.

Wir beweisen:

Die Funktionen $p_R(\phi)$ und $p_{PE}(\phi)$ sind für einen PLL erster Ordnung, mit beliebiger Nichtlinearität $g(\phi)$, identisch.
Bei Systemen höherer Ordnung gilt dies nur dann, falls die bedingten Erwarungswerte $E(y_k/\phi)$ die Periode 2π besitzen.

Beweis: $p_{PE}(\phi) = p_R(\phi)$ für einen PLL 1. Ordnung

Wegen der Periodizität von $K_o(\phi)$ gelten in den Intervallen I und III, resp. II und IV, die gleichen Differentialgleichungen. Wegen der Linearität der Gleichung folgt, dass die Summe

$$p_R(\phi) = p(\phi) + p(\phi \mp 2\pi) \tag{24}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$K_0(\Phi)\, p_R(\Phi) - \frac{1}{2} K_{a0} \frac{d}{d\Phi} p_R(\Phi) = \frac{1-2D_0}{E(\gamma_L)} \tag{25}$$

sein muss mit

$$\left.\frac{d}{d\Phi} p_R(\Phi)\right|_{\Phi_0-\pi} = \left.\frac{d}{d\Phi} p_R(\Phi)\right|_{\Phi_0+\pi}$$

$$p_R(\Phi_0-\pi) = p_R(\Phi_0+\pi) \tag{26}$$

Ebenfalls gilt, nach Konstruktion,

$$\int_{\Phi_0-\pi}^{\Phi_0+\pi} p_R(\Phi)\, d\Phi = 1 \tag{27}$$

Man zeigt leicht, dass $p_R(\Phi)$ eine periodische Funktion ist

$$p_R(\Phi+2\pi) = p_R(\Phi) \;;\; \frac{d}{d\Phi} p_R(\Phi+2\pi) = \frac{d}{d\Phi} p_R(\Phi) \tag{28}$$

Insbesondere gilt auch

$$p(-\pi) = p(\pi) \tag{29}$$

Da $p_R(\Phi)$ und $p_{PE}(\Phi)$ der gleichen Differentialgleichung gehorchen, die gleichen Rand- und Normierungsbedingungen erfüllen, müssen die beiden Funktionen identisch sein. (Eindeutigkeit der Lösung vorausgesetzt)

qed.

Für Systeme höherer Ordnung ist der Intensitätskoeffizient im all-

gemeinen nicht periodisch

$$K_o(\phi+2\pi) \neq K_o(\phi) \tag{30}$$

Experimentelle Studien zeigen, dass $E(y_k/\phi)$,definiert im Intervall $[-2\pi, +2\pi]$,in guter Näherung durch [27] , [38]

$$E(y_1/\phi) \cong AK F_o\left[\sin\phi_L - \sin\phi + \frac{(1-F_o)\cos\phi_L}{1+r\cos\phi_L}\cdot(\phi-\phi_L)\right] \tag{31}$$

ϕ_L :Gleichgewichtspunkt des linearisierten sinusoidalen PLL
$r = AKF_o \cdot \tau_2$

approximiert werden kann. Es ist zu beachten, dass $p_R(\phi)$ <u>nicht</u> eine Lösung der Differentialgleichung

$$K_o(\phi)\, p_R(\phi) - \frac{1}{2} K_{o1} \cdot \frac{d}{d\phi} p_R(\phi) = \frac{1-2D_o}{E(T_L/\phi_o)} \tag{32}$$

ist, da in den Interyallen II und IV, resp. I und III nicht die gleichen Differentialgleichungen gelten. Folglich können $P_R(\phi)$ und $p_{PE}(\phi)$ auch nicht dieselben Funktionen sein.

Zusammenfassend können wir festhalten, dass die PE-Lösung nur dann gleich der stationären Dichtefunktion des PLL ist, falls die bedingten Erwartungswerte $E(y_k/\phi)$ periodisch sind. Andernfalls - und die experimentellen Resultate deuten darauf hin - müssen wir die Schlussfolgerung ziehen, dass die PE-Lösung nicht der stationären Dichtefunktion entspricht.

9.5. MITTLERE ZYKLENZEIT $E(\tau_L)$ UND MITTLERE ANZAHL ZYKLEN PRO ZEITEINHEIT

Die mittlere Zeit $E(\tau_L)$ für einen Phasensprung ist, nach Konstruktion, unabhängig von ϕ_o^L.

* In [39] wird gezeigt, dass $E(y_1/\phi)$ für einen PLL zweiter Ordnung mit sinusförmiger Nichtlinearität ,sinusförmig ist. Dabei ist allerdings zu beachten, dass dieser Erwartungswert wahrscheinlich nur für Werte $[-\pi, \pi]$ experimentell ermittelt wurde ,und deshalb nicht mit (31) übereinstimmen muss.

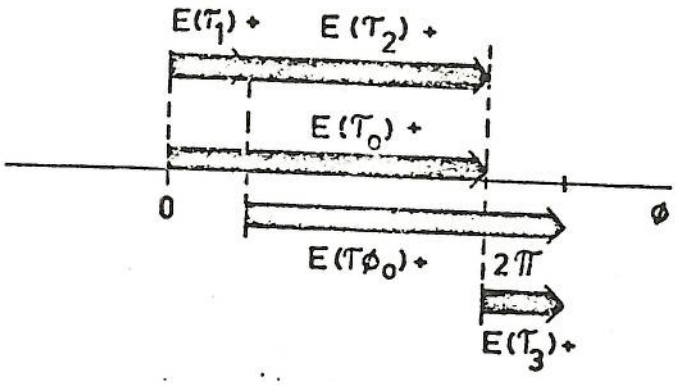


Fig. 9-3. Zerlegung der mittleren Zeit $E(T_L)$ für einen Phasensprung von 2π.

Die mittlere Zeit $E(T_0)_+$,die eine im Nullpunkt startende Trajektorie braucht,um den Punkt $\phi=2\pi$ zu erreichen,setzt sich zusammen aus

$$E(T_0)_+ = E(T_1)_+ + E(T_2)_+ \qquad (33)$$

Die Zeit,die eine in ϕ_0 startende Trajektorie braucht um $\phi=\phi_0+2\pi$ zu erreichen,ist

$$E(T_{\phi_0})_+ = E(T_2)_+ + E(T_3)_+ \qquad (34)$$

$\underline{y}(t)$ ist ein Vektor-Markovprozess mit periodischem,zeitunabhängigen Operator L.Für den Verlauf des Prozesses für $t'>t$ ist nur der momentane Zustand $\underline{y}(t)$ massgebend (Markov Eigenschaft).Falls die bedingte Verteilung $p(\underline{y}_0/\phi=2\pi k;t)$ für alle k und t gleich ist (stationärer Zustand),dann sind die Punkte $\phi=2\pi k$ gleichwertig und daher gilt

$$E(T_0)_+ = E(T_{\phi_0})_+ \qquad (35)$$

Die mittlere Anzahl Zyklen $N_{\pm}$ pro Zeiteinheit ist gegeben durch (18)

$$N_+ = \frac{1-D_0}{E(T_L)} \quad ; N_- = \frac{D_0}{E(T_L)} \qquad (36)$$

SYMBOLLISTE

Die Fülle der vorkommenden Grössen erlaubt keine exklusive Verwendung der einzelnen Symbole. Im folgenden sind die wichtigsten Grössen und ihre Symbole zusammengestellt. Die verwendeten Operationszeichen und Abkürzungen gelten hingegen für die ganze Arbeit.

1. Operationszeichen

$\approx$	asymptotisch gleich
$=$	gleich
$\equiv$	identisch
$\sim$	proportional
$\hat{}$	Schätzungswert (z. B. $\hat{x}(t)$)
$\cong$	approximativ gleich
$>, <$	grösser (kleiner) als
$\geq, \leq$	grösser (kleiner) gleich
$\triangleq$	linke Seite definiert durch rechte Seite
$*$	Faltung
$\underline{x}$	unterstrichene Grössen sind Matrizen oder Vektoren (siehe auch Appendix von Kap. 4)
x^T	transponierter Vektor (Matrize)
$\dot{x}$	zeitliche Ableitung ($dx/dt = \dot{x}$)
f'	örtliche Ableitung ($df/dx = f'$)
$\cdot$	logisches UND oder Multiplikation
$+$	logisches ODER oder Addition
E(..)	Erwartungswert Operator
l.i.m	limes im Mittel ($\lim_{n\to\infty} E(x-x_n)^2 = 0$)
[,]	abgeschlossenes Intervall
(,]; [,)	halboffene Intervalle
(,)	offenes Intervall

2. Symbole

Symbol	Bedeutung
A	Realteil von $H_1 \cdot \bar{H}_2$
A	Nominierungskonstante von $g(\vartheta)$
A_1, A_2	Realteil von H_1 resp. H_2
A_1, A_2	Amplitude der Signale $A_1 x(t)$, $A_2 x(t)$
a	dT/dt
a_i	Nullstellen in H_1, resp. H_2
B_1, B_2	Imaginärteil von H_1 resp. H_2
B	Imaginärteil von $H_1 \cdot \bar{H}_2$
$\underline{B}\ (\underline{x};t)$	Matrizenfunktion in stochast. Diff.gl.
b_i	Pole in H_1, resp. H_2
dV	Elementarvolumen
D_o, D_1	Integrationskonstanten
$d_L(\tau_L)$	Dichtefunktion der Lebensdauer der Trajektorie
f_p	Abtastfrequenz
$F(\ )$	Mittelungsfilter im PLL oder DLL
$\underline{f}(\underline{x};t)$	Kolonnenvektor in stoch. Diffg.
$f_i(\tau)$	Dichtefunktion des Beginns der i-ten Trajektorie
F_k	Nullstellen des Mittelungsfilters beim PLL
$G(z)$	$G(z) = H_1(z) \cdot H_2(1/z)$
$h_1(t), h_2(t)$	Stossantwort der Phasendrehfilter (analog)
$h_1(k), h_2(k)$	Stossantwort der Phasendrehfilter (digital)
$H_1(\ ),\ H_2(\ )$	Systemfunktion der Phasendrehfilter (Fourier-, Laplace-, z-Transformierte von $h_1(t)$, $h_2(t)$
$H_c(z)$	gemeinsamer Faktor von $H_1(z)$ und $H_2(z)$
$h_k(y;t)$	k-te Komponente der Rückstellkraft
$\underline{J}(\underline{x};t)$	Wahrscheinlichkeitsdichtestrom
K	Proportionalitätsfaktor beim VCO oder bei der gesteuerten Verzögerungsleitung
$K_k(\underline{x};t$	Intensitätskoeffizient der F-P-Gleichung
$K_{k,j}(\underline{x};t)$	Intensitätskoeffizient der F-P-Gleichung
K_x	Intensitätskoeffizient des stoch. Prozesses $x(t)$
L	Abstand der Lichtquelle bei der berührungslosen v-Messung
L	räumlicher Differentialoperator
$\underline{M}(\underline{x},t)$	Matrix, $\underline{B}(\underline{x},t) \cdot \underline{Q}(t) \cdot \underline{B}^T(\underline{x},t)$

Symbol	Bedeutung
$n_1(t), n_2(t)$	additive Rauschsignale in den Signalpfaden 1, resp.
$n_i(\phi,t)$	Eigenrauschprozess ('Intrinsic Noise') am Multiplikatorausgang
$n_n(t)$	Fremdrauschprozess am Multiplikatorausgang
$n(\phi,t)$	mittelwertfreier Rauschprozess am Multiplikatorausgang $n(\phi;t) = n_i(\phi,t)+n_n(t)$
$\frac{N}{2}(\phi)$	zweiseitige Leistungsdichte des Prozesses $n(\phi;t)$ für $f = 0$
$P(\alpha_i)$	WSK des Ereignisses α_i
$P(x \leq X)$	kumulative WSK
$p(y;t)$	WSK-Dichtefunktion
$p(\underline{y};t/\underline{x};t)$	bedingte (bezüglich $\underline{x}$) Dichtefunktion
$\overline{p}$	Heaviside Operator
$q(\underline{y};t)$	Dichtefunktion des Einzelprozesses
$R_{y1,y2}(\ )$	Korrelationsfunktion der Signale $y_1(t)$, und $y_2(t)$
$Re(\ )$	Realteil von ( )
$S_{y_1,y_2}(\omega)$	Kreuz-Leistungsdichtespektrum der Signale $y_1(t)$ und $y_2(t)$.
s	Laplace-Operator
s	Weg (nur in Kap. 8)
$S(\phi)$	WSK, dass die Trajektorie am Ort ϕ gestoppt wird
$T(t)$	Laufzeit
$u_{AC}(t)$	Akquisitionsspannung
$u_S(t)$	Steuerungsspannung des VCO oder der geregelten Verzögerungsleitung
$\underline{U_o}(\underline{x})$	Potentialfunktion
v	Geschwindigkeit
$\underline{w}(t)$	weisser Vektor-Rauschprozess
$W(t)$	WSK, dass sich die Trajektorie innerhalb $[\phi_{min},\phi_{max}$ aufhält
$x(t)$	Signal vor Phasendrehfilter (DLL)
$y_1(t), y_2(t)$	Signale nach den Phasendrehfiltern
$\underline{y_o}^T$	$\underline{y_o}^T = [y_1, y_2, \ldots y_n]$

REFERENZEN

1 M.R. O'Sullivan
Tracking Systems Employing the Delay-Lock Discriminator
IRE Trans. on Space El. (1962), March pp 1 - 7

2 F.H. Lange
Signale und Systeme III
Berlin: VEB Verlag Berlin, 1971

3 M.H. Butterfield et. al.
New Method of Strip-Speed Measurement using Random-Waveform Correlation
Trans. Soc. Instr. Technology 13 (1961), pp 55 - 59

4 I.I. Spilker et. al.
The Delay-Lock Discriminator - An Optimum Tracking Device
Proc. of the IRE 49 (1961) Sept., pp 1403 - 1416

5 I.I. Spilker
Delay-Lock Tracking of Binary Signals
IEEE Trans. on Space EL. a. Telemetry 9 (1963), March, pp 1 - 8

6 A Bibliography of the Theory and Application of the PLL
Technical Report 32 - 1581, Jet Prop. Lab, Pasadena (California), April 1

7 John B. Thomas
Statistical Communication Theory
New York: John Wiley 1969

8 F. Mesch et. al.
Geschwindigkeitsmessung mit Korrelationsverfahren
Messtechnik 7 (1971), S. 152 - 157; 8 (1971), S. 163 - 168

9 A. Papoulis
Probability, Random Variables and Stochastic Processes
New York: McGraw-Hill, 1965

10 W. Cauer
Theorie der linearen Wechselstromschaltungen
Berlin: Akademie Verlag Berlin, 1954

11 L. Bieberbach
Einführung in die Funktionentheorie
Stuttgart: B.G. Teubner Verlag, 1959

12 J. Andermo
EOS System Description
unpublished Report of the Microware Institute Stockholm, 1971

13 A.H. Jazwinsky
Stochastic Processes and Filtering Theory
New York: Academic Press, 1970

14 R.L. Stratonovitch
Topics in the Theory of Random Noise
New York: Gordon Breach, 1963

15 W.C. Lindsey
Synchronization Systems in Communication and Control
Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1972

16 E.B. Dynkin, A.A. Juschkewitsch
Sätze und Aufgaben über Markoff'sche Prozesse
Berlin: Springer Verlag, 1969

17 Gaetano Fichera
On a unified theory of Boundary Value Problems for Elliptic-Parabolic Equations of Second Order,
erschienen in
R.E. Langer
Boundary Problems in Differential Equations
Wisconsin: University of Wisconsin Press, 1959

18 W. Feller
An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol II
New York: John Wiley and Sons, 1966

19 P.D. Shaft
Optimum Design of Nonlinearity in Signal Tracking Loops
Menlo Park: Stanford Research Institute, May 1968

20 R.L. Stratonivich
Conditional Markov Processes and their Application to the Theory of Optimal Control
New York: American Elsevier Publ. Company, 1968

21 W.I. Smirnow
Lehrgang der höheren Mathematik, Band II
Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1963

22 W. Gröbner, P. Lesky
Mathematische Methoden der Physik I, II
Mannheim: BI, Hochschultaschenbücher Nr. 89/90, 90a

23 L. Bieberbach
Theorie der Differentialgleichungen
Berlin: Springer Verlag, 1930

24 I.S. Gradshteyn, Ryshik
Tables of Integrals, Series and Products
New York: Academic Press, 1965

36 H. Hetzheim
Die Methode der chronologischen Ordnung von Operatoren zur Berechnung nichtlinearer, nichtstationärer Systeme,
Hochfrequenztechnik und Elektroakustik, Leipzig, 80(1971) 2, S. 55 - 59 und 80 (1971) 3, S. 75 - 79

37 J. J. Stiffler
On the Selection of Signals for PLL's,
IEEE Trans. on Com. Tech. Com 16 (1968), April, pp 239 - 244

38 R. Tausworthe
Cycle Slippings in Phase-Locked Loops
IEEE Trans. on Com. Tech. Com 15 (1967), June pp 417 - 421

39 W. C. Lindsey
Nonlinear Analysis of Generalized Tracking Systems, pt I,
University of Southern California, Dept. of El. Eng., Los Angeles, Report 317

LEBENSLAUF

Ich wurde am 8. April 1941 in Zürich geboren und bin Bürger dieser Stadt. Die Primar- und Sekundarschule besuchte ich in Zürich. Anschliessend absolvierte ich eine 4jährige Lehre als Maschinenschlosser, die ich im Jahre 1961 abschloss. Während meiner Lehrzeit begann ich mit dem Besuch des Abendgymnasiums. Im Jahre 1963 bestand ich die eidgenössische Maturitätsprüfung C. Während der folgenden 4 Jahre studierte ich an der ETHZ Elektrotechnik. Ende 1967 konnte ich am Institut für Automatik und industrielle Elektronik mit dem Diplom als Elektroingenieur abschliessen.

Anschliessend trat ich im Studienbüro der MFO, Oerlikon, eine Stelle als Entwicklungsingenieur an. Im Jahre 1969 wechselte ich an das Eidgenössische Institut für Reaktorforschung über. Seit Mai 1970 bin ich in der Forschungsabteilung der Hasler AG, Bern, tätig, wo ich hauptsächlich auf dem Gebiete der Bildcodierung und der Theorie der statistischen Nachrichtentechnik arbeite. Im Rahmen meiner Tätigkeit ist dann diese theoretische Arbeit entstanden.